А.В. Гласко

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

МОДУЛЬ 1

«ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ»

Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
2013

Лекция 1

§1. Логическая символика.

При записи математических выражений будем использовать следующие логические символы:

Символ	Значение	Символ	Значение
$\wedge$, &	и	$\forall$	Для любого, для всякого, для всех (от англ. any)
$\vee$	или	$\exists$	Существует, найдется, имеется (exist)
$\neg$	не	$\Rightarrow$	Влечет, следует (следовательно)
		$\Leftrightarrow$	Эквивалентно, тогда и только тогда, необходимо и достаточно

Так если A и B какие-либо высказывания, то

Запись	Значение
$A \wedge B$	A и B
$A \vee B$	A или B (или A или B, или и A и B)
$\neg A$	Не A
$\overline{A}$	Не A
$\forall x:\ A$	Для любого x имеет место A
$\exists x:\ A$	Существует x, для которого имеет место A
$A \Rightarrow B$ (импликация)	Из A следует B (если верно A, то верно B)
$A \Leftrightarrow B$	A эквивалентно B, A имеет место тогда и только тогда, когда имеет место B, для B необходимо и достаточно A

Замечание. “$A \Rightarrow B$” означает, что для B *достаточно* A, а для A *необходимо* B.

Пример. (x=1) => (x^2-3x+2=0) => ((x=1) $\vee$ (x=2)).

Иногда мы будем использовать ещё один специальный символ:

$$A =^{df} B.$$

Он означает, что A = B по определению.

§2. Множества. Элементы и части множества.

Понятие *множества* – первичное понятие, не определяемое через более простые. Слова: совокупность, семейство, набор – его синонимы.

Примеры множеств: множество студентов в аудитории, множество преподавателей на кафедре, множество автомобилей на стоянке и пр.

Первичными понятиями также являются понятия *элемента множества* и *отношения* между элементами множества.

Пример. N – множество натуральных чисел, его элементами являются числа 1,2,3,… Если x и y – элементы N, то они находятся в одном следующих отношений: $x=y$, $x<y$ или $x>y$.

Условимся обозначать множества заглавными буквами: A, B, C, X, Y, …, а их элементы – строчными: a, b, c, x, y, …

Отношения между элементами или множествами обозначаются символами, вставленными между буквами. Например. Пусть A – некоторое множество. Тогда отношение $a \in A$ означает, что a – элемент множества A. Запись $a \notin A$ означает, что a не является элементом A.

Множество можно задать различными способами.

1. Перечислением его элементов.

Например, A={a, b, c, d}, B={1, 7, 10}

2. Указанием свойств элементов. Пусть A – множество элементов a, обладающих свойством p. Это можно записать в виде: A={ a:p } или A={ a|p }.

Например, запись $A= \{ x : (x \in R) \wedge (x^2-1>0) \}$ означает, что A – есть множество вещественных чисел, удовлетворяющих неравенству $x^2-1>0$.

Введем несколько важных определений.

Опр. Множество называется *конечным*, если оно состоит из определённого конечного числа элементов. В противном случае оно называется *бесконечным*.

Например, множество студентов в аудитории конечно, а множество натуральных чисел или множество точек внутри отрезка бесконечно.

Опр. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается $\varnothing$.

Опр. Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Пример. A={1, 3, 5}, B={5, 1, 3}   A=B.

Т.е. понятие множества не подразумевает того или иного порядка следования элементов.

Опр. Множество X называется подмножеством множества Y, если любой элемент множества X является элементом множества Y (при этом, вообще говоря, не любой элемент множества Y является элементом множества X).

При этом используется обозначение: $X \subset Y$.

Например, множество апельсинов O является подмножеством множества фруктов F: $O \subset F$, а множество натуральных чисел N является подмножеством множества вещественных чисел R: $N \subset R$.

Символы “$\in$” и “$\subset$” называются символами включения. Считают, что каждое множество является подмножеством самого себя. Пустое множество является подмножеством любого множества.

Опр. Любое непустое подмножество B множества A, не равное A, называется *собственным подмножеством.*

§ 3. Диаграммы Эйлера-Венна. Элементарные операции над множествами.

Множества удобно изобразить графически, в виде областей на плоскости. При этом подразумевается, что точки области соответствуют элементам множества. Такие графические представления множеств называются диаграммами Эйлера-Венна.

Пример. A – множество студентов МГТУ, B – множество студентов в аудитории. Рис. 1 наглядно демонстрирует, что $A \subset B$.

Диаграммы Эйлера-Венна удобно использовать для наглядного изображения элементарных *операций над множествами*. К основным операциям относятся следующие.

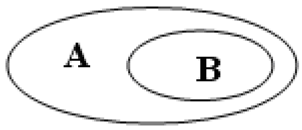


Рис. 1. Пример диаграммы Эйлера-Венна.

1. *Пересечением* $A \cap B$ множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно обоим множествам A и B:

$$C=A \cap B =^{df} \{ z : (z\in A) \wedge (z\in B) \}$$

(на рис. 2 множество C представлено заштрихованной областью).

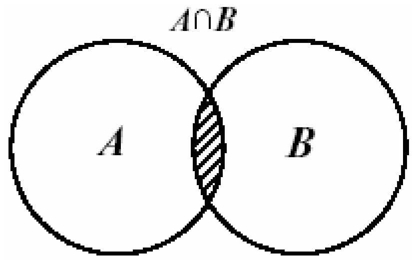


Рис. 2. Пересечение множеств.

2.*Объединением* $A \cup B$ множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B.

$$C=A \cup B =^{df} \{ z : (z\in A) \vee (z\in B) \}$$

(на рис. 3 множество C представлено заштрихованной областью).

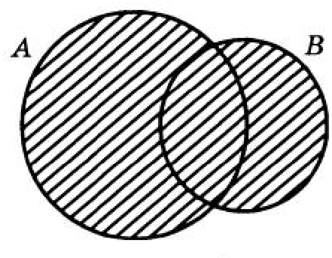


Рис. 3. Объединение множеств.

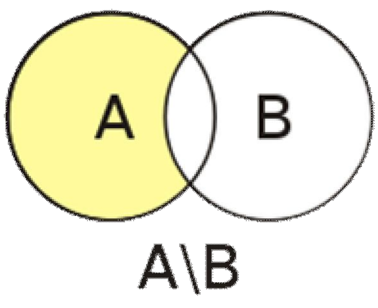


Рис. 4. Разность множеств.

3. *Разностью* A\B множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих множеству B:

$$A \setminus B = \{ z : (z \in A) \wedge (z \notin B) \}$$

(на рис. 4 множество C представлено закрашенной желтым цветом областью).

§4.Множество действительных чисел.

Построим множество вещественных (действительных) чисел R. Для этого рассмотрим, прежде всего, *множество натуральных чисел*, которое определим следующим образом. В качестве первого элемента возьмем число n=1. Каждый последующий элемент будем получать из предыдущего добавлением единицы:

$$N = \{1, 1+1, (1+1)+1, \ldots\} = \{ 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots \}.$$

Введем, далее, *множество целых отрицательных чисел*, изменив знак всех элементов N:

$$-N = \{ -1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots \}.$$

Множество целых чисел Z определим как объединение трех множеств: N, -N и множества, состоящего из единственного элемента – нуля:

$$Z = -N \cup \{ 0 \} \cup N.$$

Множество рациональных чисел определим как множество всевозможных отношений целых чисел:

$$Q = \{ x | x = m/n;\ m, n \in Z,\ n \neq 0 \}.$$

Очевидно, что $N \subset Z \subset Q$.

Известно, что каждое рациональное число может быть записано в виде конечной действительной или бесконечной периодической дроби. Достаточно ли рациональных чисел для измерения всех величин, с которыми мы можем встретиться при изучении окружающего нас мира? Уже в Древней Греции было показано, что нет: если рассмотреть равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами длинной единица, длину гипотенузы нельзя представить в виде рационального числа. Таким образом, мы не можем ограничиться множеством рациональных чисел. Необходимо расширить понятие числа. Это расширение достигается введением *множества иррациональных чисел* J, которое проще всего мыслить как множество всех непериодических бесконечных десятичных дробей.

Объединение множеств рациональных и иррациональных чисел называется *множеством действительных (вещественных)* чисел R :

$$R = Q \cup Y.$$

Иногда рассматривают еще расширенное множество действительных чисел R , понимая под ним множество R, к которому присоединено два символа $+\infty$ и $-\infty$. При этом полагают, что

$\forall\ x \in R$: $-\infty < x < +\infty$ и $-\infty < +\infty$.

Действительные числа удобно изображать точками на числовой оси.

Опр. *Числовой осью* называется прямая, на которой указано начало отсчета, масштаб и направление отсчета.

Между действительным числами и точками числовой оси устанавливается взаимно однозначное соответствие: любому вещественному числу соответствует единственная точка числовой оси и наоборот.

Аксиома полноты (непрерывности) множества действительных чисел. Каковы бы ни были непустые множества A= { a } $\subset$ R и B= {b} $\subset$ R такие, что для любых a и b выполняется неравенство $a \le b$, найдется число c $\in$ R такое, что $a \le c \le b$ (рис. 5).

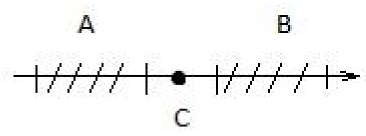


Рис.5. Иллюстрация аксиомы полноты множества вещественных чисел.

§5. Числовые множества. Окрестности.

Опр. *Числовым множеством* называется любое подмножество множества R.
Важнейшие числовые множества: N, Z, Q, J, а также

отрезок: $[a,b] = \{x \in R \mid a \le x \le b\}$,

интервал: $(a,b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$, $(-\infty,+\infty)=R$

полуинтервалы: $[a,b) = \{x \in R \mid a \le x < b\}$,

$(a,b] = \{x \in R \mid a < x \le b\}$,

$[a,+\infty) = \{x \in R \mid a \le x < +\infty\}$

$(-\infty,b] = \{x \in R \mid -\infty < x \le b\}$.

Важнейшую роль в математическом анализе играет понятие *окрестности* точки числовой оси.

Опр. *δ-окрестностью точки* x_0 называют интервал длиной 2δ с центром в точке x_0 (рис. 6):

$$u_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

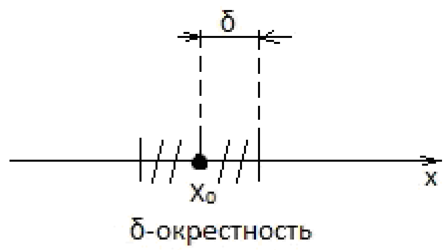


Рис. 6. Окрестность точки.

Опр. *Проколотой δ-окрестностью точки* x_0 называется окрестность этой точки, из которой исключена сама точка x_0 (рис. 7):

$$\dot{u}_\delta(x_0) = u_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta).$$

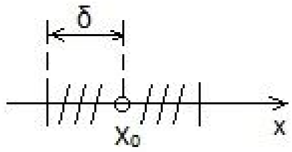


Рис. 7. Проколотая окрестность точки.

Опр. *Правосторонней δ -окрестностью точки x_0* называется полуинтервал

$$u_\delta(x_0+) = [x_0, x_0 + \delta)$$

(рис. 8). Аналогично определяется левосторонняя окрестность.

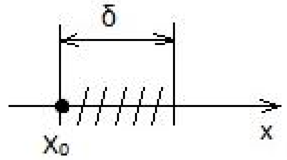


Рис. 8. Правосторонняя окрестность точки.

Опр. *Проколотой правосторонней δ -окрестностью точки x_0* называется интервал

$$\dot{u}_\delta(x_0+) = (x_0, x_0 + \delta),$$

т.е. правосторонняя δ -окрестность этой точки, из которой исключена сама точка x_0. Аналогично определяется левосторонняя проколотая окрестность.

Опр. *δ -окрестностью плюс бесконечности* («точки» $+\infty$) называется интервал

$$u_\delta(+\infty) = (\delta, +\infty).$$

Аналогично определяется *δ -окрестность* «точки» $-\infty$.

Опр. *δ -окрестностью* бесконечности («точки» ∞) называется интервал $u_\delta(\infty) = \{x \in R: \ |x| > \delta\}$ (рис. 9).

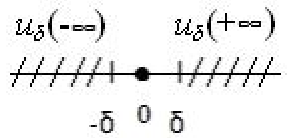


Рис. 9. Окрестность бесконечности (∞).

Другими словами, δ -окрестность бесконечности – это объединение δ -окрестности плюс бесконечности и δ -окрестности минус бесконечности:

$$u_\delta(\infty) = (-\infty, -\delta) \cup (\delta, +\infty) = u_\delta(-\infty) \cup u_\delta(+\infty).$$

Окрестности $u_\delta(x_0)$, $\dot{u}_\delta(x_0)$, $u_\delta(\infty)$ называются *двусторонними,* а окрестности $u_\delta(x_0+)$, $\dot{u}_\delta(x_0+)$, $u_\delta(+\infty)$ и т.д. – *односторонними.* Число δ называется *радиусом* окрестности.

§ 6. Ограниченные и неограниченные числовые множества.

Рассмотрим произвольное числовое множество X ($X \subset R$).

Опр. Множество X называется ограниченным сверху, если существует такое число M, что все элементы этого множества меньше либо равны M:
$\exists M \in R: \ \forall x \in X \ \Rightarrow \ x \le M$. Число M называется верхней гранью множества X.
Аналогично определяется множество ограниченное снизу и нижняя грань.

Опр. Множество, ограниченное как сверху – так и снизу, называется ограниченным.
Очевидно, что у любого ограниченного множества существует бесконечное множество верхних и нижних граней. Например, множество X={3,5,8}, состоящее из трех элементов, ограничено. При этом, в качестве верхней грани можно рассматривать число M=100 (поскольку любой элемент множества X меньше 100), а можно – M=1000.

Опр. Наименьшая из всех верхних граней множества X называется его *точной верхней гранью* (*супремумом*) и обозначается

$$\overline{x} = \sup X$$

(от лат. supremum - наивысшая).

Опр. Наибольшая из всех нижних граней множества X называется его *точной нижней гранью* (*инфинимумом*) и обозначается

$$\underline{x} = \inf X$$

(от лат. infinimum - наинизшая).
Так, для рассмотренного выше множества X={3,5,8}, $\sup X = 8$, а $\inf X = 3$.

Теорема. Если множество вещественных чисел содержит хотя бы один элемент и ограничено сверху (снизу), то существует вещественное число $\overline{x}$ ($\underline{x}$), которое является точной верхней (нижней) гранью этого множества.

Доказательство. Не ограничивая общности, проведем доказательство для множества ограниченного сверху (для множества ограниченного снизу теорема доказывается аналогично). Итак, пусть множество X ограничено сверху. Обозначим B={b} множество всех его верхних граней:

$\forall x \in X, \ b \in B: \ x \le b$.

В силу аксиомы полноты R: $\exists c: \ \forall x \in X, \ b \in B: \ x \le c \le b$.
Поскольку $\forall x \in X \quad x \le c$, то c - верхняя грань множества X. Но, поскольку, $\forall b \in B \ \ c \le b$, c - наименьшая из всех верхних граней, т.е. точная верхняя грань множества X.
Таким образом, точная верхняя грань существует.

Теорема доказана.

§7. Понятие функции. Обратная и сложная функция.

Пусть даны два множества произвольной природы: *D={x} и E={y}*.

Опр. Говорят, что задана функция *f*, определенная на *D* со значениями в *E* или задано отображение *D* в *E*, если указан закон по которому любому элементу $x \in D$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in E$.
Итак, задать функцию означает указать 3 множества:

$$D=\{x\}, \ E=\{y\}, \ F=\{(x,y)\}.$$

Пример. Функция $y=x^2$. $D=R$, $E = R_+ = [0,+\infty)$, $F=\{(x,x^2) \mid x \in R\}$.
Используются следующие основные обозначения:

$$y=f(x) \text{ или } f:D \to E.$$

D называется областью *определения функции f, E – областью значений, x – аргументом* или *независимой переменной, y – значением* функции. Если $A \subset D$, то $f(A)=\{f(x)|\, x \in A\}$ называется *образом* множества A.

Опр. Отображение множества D в множество E называется *взаимно однозначным* (*биективным*), если любому $x \in D$ соответствует единственное $y \in E$, а разным x отвечают (обязательно) различные y (или, что то же самое, любому $y \in E$ отвечает единственное $x \in D$).

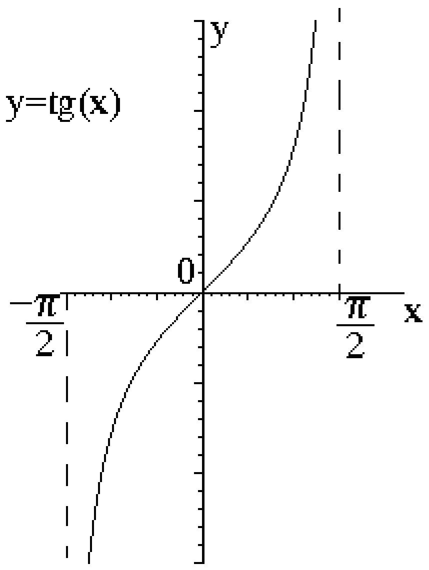
Если отображение D в E взаимно однозначно, очевидно определено обратное отображение (обратное однозначное соответствие) $E \to D$, т.е. обратная функция. Если «прямая» функция (функция $D \to E$) – есть $y = f(x)$, то обратную функцию обычно обозначают $x = f^{-1}(y)$.

Примеры.

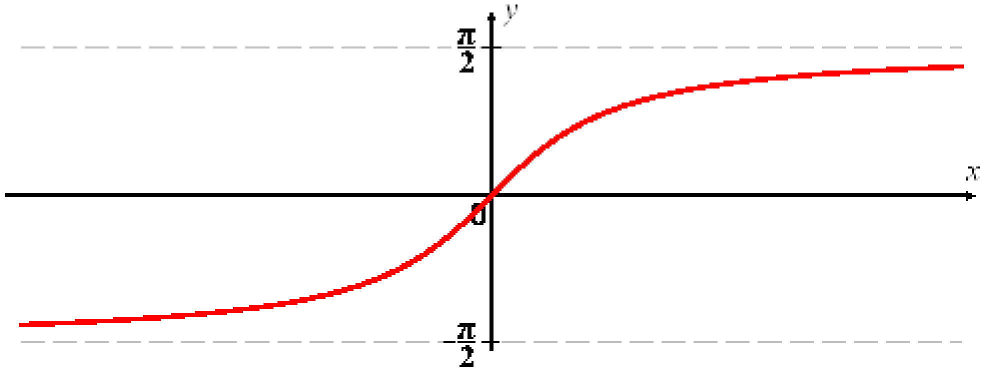
1. Для функции $y=x^3$, обратной функцией является $x = \sqrt[3]{y}$. Как для прямой, так для обратной функции и область определения и область значений есть R.

2. Для функции $y = a^x$ (для определенности, будем считать $a > 1$) обратной функцией является $x = \log_a y$. Область определения прямой функции, в данном случае, $x \in R$, область значений $y \in (0, +\infty)$. Область определения обратной функции $y \in (0, +\infty)$, область значений $x \in R$.

3. Для функции $y = tgx$ обратной является $x = arctgy$. Здесь ситуация сложнее. Прямая функция определена всюду на R, за исключением точек $x_n = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, \quad n \in Z$. Область значений прямой функции - R. Область определения обратной функции (см. рис. 10 *б*) - R, а область значений – интервал $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Другими словами, для определения обратной функции выбирается только одна ветвь тангенса (представленная на рис. 10 *а*), иначе обратное соответствие не было бы однозначным (т.е. не было бы функцией):

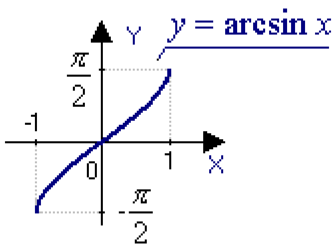


а) График «основной» ветви функции $y = tgx$.



б) График функции $y = arctgx$.

Рис. 10. График «Основная» ветвь графика функции $y = tgx$ и график обратной функции $y = arctgx$.



каждому значению y отвечало бы бесконечное множество значений x (соответствующих различным ветвям тангенса).

Аналогичным образом (с учетом требования однозначности), вводятся другие обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arcctgx$. Так, на рис. 11 представлен график функции $y = \arcsin x$. Область определения функции: *D*=[*-1,1*], область значений: *E*=[*-π/2,π/2*].

Рис. 11. График функции $y = \arcsin x$.

Введем теперь понятие *сложной функции* (*композиции отображений*). Пусть даны три множества D, E, M и пусть f: D→E, g: E→M. Очевидно, можно построить новое отображение h: D→M, называемое композицией отображений f и g или сложной функцией (рис. 12).
Сложная функция обозначается следующим образом: z =h(x)=g(f(x)) или h = f o g.

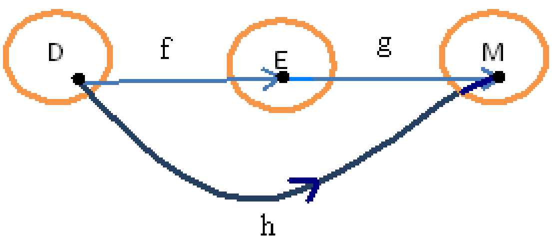


Рис. 12. Иллюстрация к понятию сложной функции.

Функция $f(x)$ при этом называется *внутренней функцией*, а функция $g(y)$ - *внешней функцией.*

Примеры.

1. Внутренняя функция f(x)= x^2, внешняя $g(y) = \sin y$. Сложная функция *z= g(f(x))=sin(x²)*

2. Теперь наоборот. Внутренняя функция *f*(*x*)= $\sin x$, внешняя $g(y) = y^2$. *u=f(g(x))=sin²(x)*

§8. Основные элементарные функции. Класс элементарных функций.

В курсе математического анализа 1-ого семестра мы ограничимся изучением отображений R→R. Важнейшими из этих отображений являются элементарные функции.

Для построения класса элементарных функций определим сначала *основные элементарные функции*. К основным элементарным функциям относятся:

Степенные функции: $y = x^{\alpha}$

Показательные функции: $y = a^{x}$

Логарифмические функции $y = \log_a x$

Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ $y = tgx$, $y = ctgx$

Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$

Опр. *Элементарной функцией* называется функция, построенная из основных элементарных функций и постоянных с помощью операций сложения, умножения и деления, а также композиции (построения сложной функции).

Пример. Функции $y = 2e^{-5\sin x^2}$, $y = arctgx^{\frac{1}{4}}$ являются элементарными функциями.

Отображения R→R не ограничиваются элементарными функциями.

Приведем также примеры функций, не являющихся элементарными.

Пример. Функция $y = sign(x)$, определенная равенством

$$sign(x) = \begin{cases} 1, \ x \ge 0; \\ -1, \ x < 0 \end{cases},$$

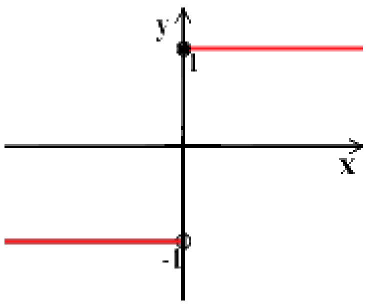


Рис.13. График функции $y = signx$.

называемая *сигнатурой* (рис. 13). Она является отображением R→R, но не относится к классу элементарных функций.

Пример. Другим примером неэлементарной функции служит функция «целая часть» $y = [x]$ – отображение, ставящее в соответствие вещественному числу результат его округления до ближайшего целого в меньшую сторону. Так

$$[10.8]=10, \text{ а } [-2.7] = -3.$$

§9. Понятие числовой последовательности.

Рассмотрим бесконечное упорядоченное множество вещественных чисел, элементы которого пронумерованы натуральными числами (индексами $n = 1, 2, 3, \dots$):

$\{x_n\} = x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

Такое множество называется *числовой последовательностью*, а его элементы x_i – *членами числовой последовательности* (Рис. 14).

Примеры.
1) {3n}=3, 6, 9, 12, 15…

2) $\{2^n\}$ =2, 4, 8, 16…
3) {1}=1, 1, 1, 1, 1…
4) $\{(-1)^n\}$=1, -1, 1, -1, 1…

Рис. 14. Числовая последовательность.

Отметим, что последовательность – частный вид функции, а именно – функция $N \to R$, т.е. отображение с областью определения на множестве натуральных чисел и областью значений на множестве вещественных чисел: x=f(n).
Задать последовательность – значит указать правило, позволяющее по номеру n находить значение x_n. Обычно последовательность задается формулой вида $x_n = f(n)$. Например, $x_n = \frac{1}{2^n}$. Можно также задать последовательность с помощью *рекуррентной формулы*. Простейшая рекуррентная формула выражает каждый следующий член последовательности через предыдущий: $x_{n+1} = f(x_n)$. При этом нужно дополнительно задать первый член последовательности x_1. Например, условия

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = 2x_n,\ n = 1,2,3,...$$

задают последовательность 1,2,4,8,… .
Понятие ограниченной (сверху или снизу) числовой последовательности вводится также как для числового множества (поскольку последовательность – частный случай множества).

Лекция 2

§1. Предел числовой последовательности.

Говорят, что *числовая последовательность* $\{x_n\}$ *имеет предел, равный* a:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

если все члены этой последовательности с достаточно большими номерами сколь угодно близки к числу a.

В качестве примера, рассмотрим последовательность, представленную на рис. 1. Первый элемент последовательности x_1 выбирается произвольно. Второй элемент x_2 выбирается делением отрезка $[x_1, a]$ пополам. Третий элемент – делением отрезка $[x_2, a]$ пополам и т.д.

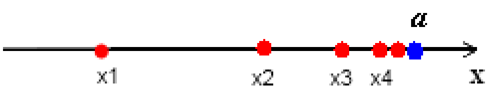


Рис. 1. Предел числовой последовательности.

Дадим теперь точное определение предела.

Опр. Число a называется *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$ при $n \to \infty$, если для любого, сколь угодно малого, положительного числа ε найдется такое, достаточно большое, натуральное число N, что при $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$:

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = a\} \Leftrightarrow^{df} \{\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon\}.$$

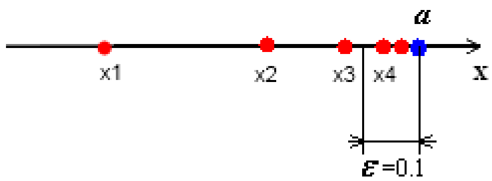


Рис. 2. Предел числовой последовательности.

Так, на рис. 2 показано, что если выбрать $\varepsilon = 0.1$, все члены рассмотренной выше последовательности с номерами $n > N = 3$ отличаются от a меньше, чем на ε (т.е. $|x_n - a| < \varepsilon$). Если же выбрать ε в сто раз меньше, чем показано на рис. 2, то, все-равно, найдется такое значение номера члена последовательности N (например, $N = 500$), что все последующие члены отличаются от a меньше чем и на это ε. И.т.д.
Если последовательность имеет предел a, то говорят, что она *сходится (к a)*. В противном случае, говорят, что последовательность *расходится*. Для обозначения сходимости последовательности к числу a используется также формы записи

$$x_n \to a,\ \text{при } n \to \infty, \text{ или } x_n \xrightarrow{n\to\infty} a.$$

Примеры.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Действительно, рассматриваемая последовательность имеет вид $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots$. Очевидно, что члены последовательности с достаточно большими номерами будут сколь угодно близки к нулю (рис. 3).

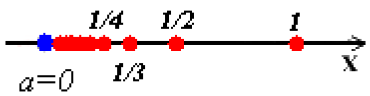


Рис. 3. Иллюстрация сходимости последовательности $x_n = 1/n$.

Более строго. Для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, при $n > N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ (напомню, что квадратные скобки означают целую часть числа, например, $[2.5] = 2$) выполняется неравенство $|x_n| < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. В таблице 1 приведены значения N для трех различных значений ε.

Таблица 1.

ε	0.1	0.01	0.001
N	10	100	1000

Видим, что члены последовательности с номерами $n > 10$ отличаются от предела $a = 0$ меньше чем на 0.1, члены последовательности с $n > 100$ – меньше чем на 0.01 и т.д. Сколь бы малым мы не задали $\varepsilon > 0$, члены последовательности с достаточно большими номерами (большими некоторого номера $N(\varepsilon)$) будут отличаться от значения предела $a = 0$ меньше чем на ε.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} 10^{\frac{1}{n}} = 1$. Действительно, поскольку члены последовательности $x_n = \frac{1}{n}$ при достаточно больших n будут сколь угодно близки к нулю, а $10^0 = 1$, то члены последовательности $x_n = 10^{\frac{1}{n}}$ при достаточно больших n будут сколь угодно близки к $a = 1$ (позже будет доказана теорема о пределе сложной функции, придающая строгий смысл этим рассуждениям).

3. Последовательность $x_n = 2^n$ расходится. Действительно, эта последовательность имеет вид $2, 4, 8, 16, 32, \ldots$. Очевидно, что не существует такого числа a, что все члены последовательности с достаточно большими n сколь угодно близки к a (рис. 4).

Отметим, что для данной последовательности характерна следующая черта. Члены с достаточно большими n сколь угодно велики (при достаточно больших n члены последовательности будут больше любого, сколь угодно большого, наперед заданного числа ε). В таких случаях говорят, что предел последовательности равен плюс бесконечности: $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty$ (частный случай расходимости последовательности).

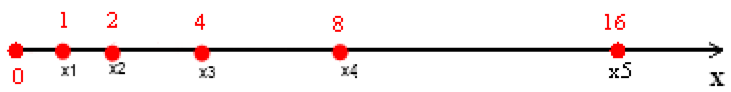


Рис. 4. Иллюстрация расходимости последовательности $x_n = 2^n$.

4. Последовательность $x_n = (-1)^n$ тоже расходится. Она имеет вид: $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$. Члены последовательности «прыгают» то вправо, то влево от нуля, повторяя одну и ту же пару значений (рис. 5), и ни к какому a последовательность не сходится (не существует такого числа a, что все члены последовательности с достаточно большими n сколь угодно мало отличаются от a).

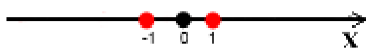


Рис.5.Последовательность $x_n = (-1)^n$.

5. Нетрудно видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n 2^{-n} = 0$ (рис. 6). Члены последовательности имеют вид $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \ldots$. Этот пример подобен примеру, представленному на рис. 1 (в случае $a = 0$), но при этом члены последовательности «прыгают» то вправо, то влево относительно предела $a = 0$. Пример подчеркивает существенность модуля в неравенстве $|x_n - a| < \varepsilon$, фигурирующем в определении предела.

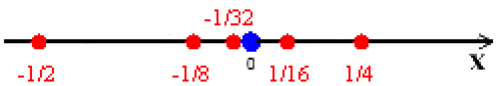


Рис. 6. Иллюстрация сходимости последовательности $x_n = (-1)^n 2^{-n}$.

6. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{2n+4}=\frac{3}{2}$. Будем отталкиваться от определения предела. Выберем любое, сколь угодно малое $\varepsilon>0$ и запишем неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$ для данного случая:

$$\left|\frac{3n-1}{2n+4}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon. \qquad (1)$$

После приведения дробей под знаком модуля к общему знаменателю, получим:

$$\frac{7}{|2n+4|}<\varepsilon,$$

откуда $|2n+4|>\frac{7}{\varepsilon}$. Раскрывая модуль, видим, что при $n>\frac{7}{2\varepsilon}-2$ действительно выполняется неравенство (1). Обозначим

$$N=\left[\frac{7}{2\varepsilon}-2\right]. \qquad (2)$$

Тогда при $n>N$ справедливо неравенство (1). Таким образом,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=\left[\frac{7}{2\varepsilon}-2\right]:\ n>N\Rightarrow\left|\frac{3n-1}{2n+4}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon.$$

Последнее и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{2n+4}=\frac{3}{2}$.

Интересно исследовать зависимость $N(\varepsilon)$ на данном примере. Она выражается формулой (2). В таблице 2 приведены значения N для трех различных значений ε.

Таблица 2.

ε	0.1	0.01	0.001
N	33	348	3498

§2. Основные свойства предела последовательности

Теорема. Пусть $x_n=c,\ n=1,2,3,...,$ где с – постоянная (т.е. члены последовательности не зависят от n. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon>0$ и выберем произвольное N (например, $N=1$) . Очевидно, что при $n>N$ $|x_n-c|=|c-c|=0<\varepsilon$, что и означает (в соответствии с определением предела), что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

Теорема доказана.

Теорема. (О единственности предела). Если предел последовательности $\{x_n\}$ существует, то он единственен.

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Предположим, что существует два различных предела последовательности $\{x_n\}$:

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$, причем $a\neq b$.

Пусть, для определенности, b>a. Выберем

$$\varepsilon=\frac{b-a}{2}>0.$$

Тогда по определению предела

$$\exists N_1:\ n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$
$$\exists N_2:\ n > N_2 \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon$$

Обозначим через N наибольшее среди чисел N_1 и N_2: $N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда при $n > N$ выполняются оба неравенства:

$$\begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon \\ |x_n - b| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n - a < \dfrac{b-a}{2} \\ x_n - b > -\dfrac{b-a}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n < \dfrac{a+b}{2} \\ x_n > \dfrac{a+b}{2} \end{cases}.$$

Приходим к противоречию. Следовательно, наше предположение о существовании двух различных пределов было неверным и предел единственен.

Теорема доказана.

Теорема (необходимое условие сходимости последовательности). Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Итак, пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и ее предел равен a: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. По определению предела,

$$\exists N > 0:\ n > N \Rightarrow\ |x_n - a| < \varepsilon \ \Rightarrow\ -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \ \Rightarrow\ a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

С другой стороны при $n \le N$ имеется конечное множество элементов x_n. Наибольший из них обозначим M_1, а наименьший – m_1. Обозначим, далее, через M наибольшее из чисел M_1 и $a+\varepsilon$, а через m – наименьшее из чисел m_1 и $a-\varepsilon$:

$$M = \max\{M_1, a+\varepsilon\},\ m = \min\{m_1, a-\varepsilon\}.$$

Имеем $\forall n:\ m \le x_n \le M$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ ограничена и сверху и снизу, а значит ограничена.

Теорема доказана.

Без доказательства сформулируем последнее из рассматриваемых здесь свойств предела последовательности.

Теорема (теорема Вейерштрасса или достаточное условие сходимости последовательности). Если неубывающая (невозрастающая) последовательность ограничена сверху (снизу), то она сходится, причем ее предел равен ее точной верхней грани.

§3. Предел последовательности $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Гиперболические функции.

Теорема. Существует предел последовательности $a = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, причем этот предел удовлетворяет неравенству $2 < a < 3$.

Рассматриваемый предел называется *числом Эйлера* или *числом* e:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Вычисление значения данного предела с точностью до третьего знака после запятой дает: $e \approx 2.718$. Число e играет важную роль в математическом анализе и фигурирует во многих формулах и задачах. Показательная функция $y = e^x$ с основанием e называется *экспонентой*, а логарифмическая функция по снованию e – *натуральным логарифмом*: $y = \log_e x = \ln x$. Обычно, если речь идет о натуральном логарифме, слово «натуральный» пропускается, т.е., если не указано основание логарифма, подразумевается, что логарифм натуральный. Экспонента и натуральный логарифм – взаимнообратные функции, т.е.

$$y = e^x \;\Rightarrow\; x = \ln y .$$

Введем понятие гиперболических функций.

Гиперболический синус определяется равенством:

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} .$$

Гиперболический косинус:

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} .$$

Гиперболический тангенс:

$$thx = \frac{shx}{chx} .$$

Гиперболический котангенс:

$$cthx = \frac{chx}{shx} .$$

Нетрудно видеть, что shx - нечетная функция, а chx - четная. На рис. 7 представлены графики гиперболического синуса и гиперболический косинуса.

Выпишем без доказательства некоторые основные соотношения между гиперболическими функциями (их легко получить из определений этих функций):

$$ch^2x - sh^2x = 1$$
$$sh2x = 2shx \cdot chx$$
$$ch(2x) = ch^2x + sh^2x .$$

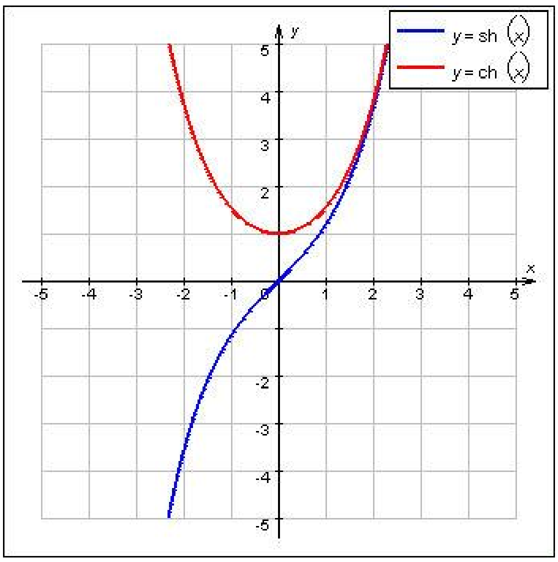


Рис. 7. Графики функций $y = shx$ и $y = chx$.

Лекция 3

§1. Предел действительной функции одного действительного переменного ($R \to R$).

Говорят, что предел функции $f(x)$ при x стремящемся к x_0 равен a, если в достаточно малой окрестности точки x_0 значения функции $f(x)$ сколь угодно близки к числу a. Более строго определение предела формулируется следующим образом.

Опр. Число a называется *пределом* функции $f(x)$ при x стремящемся к x_0, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое достаточно малое положительное число δ, что в проколотой окрестности $\dot{u}_\delta(x_0)$ точки x_0 выполняется неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$:

$$\left\{a=\lim_{x\to x_0} f(x)\right\} \Leftrightarrow^{df} \left\{\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ x\in\dot{u}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon\right\}.$$

Число x_0 называется предельной точкой. Отметим, что условие $x\in\dot{u}_\delta(x_0)$, очевидно, эквивалентно неравенству $0<|x-x_0|<\delta$.

Геометрический смысл этого определения иллюстрируется рис. 1: если значения x попадают в интервал $(x_0-\delta, x_0)$ или $(x_0, x_0+\delta)$, то соответствующие значения y попадают в интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Если элементарная функция $f(x)$ определена в точке x_0, то ее предел при $x\to x_0$ часто равен ее значению в этой точке (в этом случае функция называется непрерывной):

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Например,

$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ и т.д.

Однако, в общем случае, функция может быть не определена в точке x_0, но при этом иметь предел при $x\to x_0$. Чтобы подчеркнуть это, на рис. 1 точка (x_0,a) изображена в виде пустого кружочка.

Пример. Рассмотрим функцию $y=\dfrac{\sin x}{x}$. Как известно, она не определена в точке $x=0$. Тем не менее, если вычислять значения этой функции в точках все более и более близких к нулю, можно убедиться, что эти значения все более и более близки к единице. Более того, значения этой функции будут сколь угодно мало отличаться от единицы при x достаточно близких к нулю. По определению, это означает, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

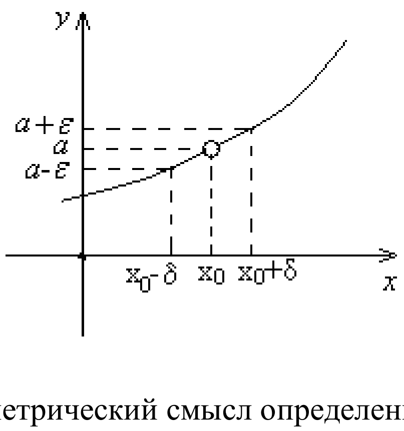


Рис. 1. Геометрический смысл определения предела.

Позже это равенство будет доказано аналитически, на основе определения предела (этот предел называется первым замечательным пределом).

Пример. Функция $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$ не определена при $x=1$. Вычислим предел этой функции при $x\to 1$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{2}.$$

Символ «$\dfrac{0}{0}$» над знаком «равно» означает, что при подстановке в дробь под знаком предела значения $x=1$, и числитель и знаменатель этой дроби принимают нулевое значение. Из-за этого предел не может быть вычислен непосредственно подстановкой предельного значения аргумента, как в случае предела $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$. В подобных случаях, говорят о наличии *неопределенности*. В рассмотренном пределе имеет место неопределенность «$\dfrac{0}{0}$». В дальнейшем мы столкнемся с другими типами неопределенностей. Известны следующие основные типы:

$$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,\infty-\infty,1^{\infty},0^{0},\infty^{0}.$$

Опр. Число a называется пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к x_0 справа (правосторонним пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к x_0), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое достаточно малое положительное число δ, что в правосторонней проколотой окрестности $\dot{u}_\delta(x_0+)$ точки x_0 выполняется неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$:

$$\left\{a=\lim_{x\to x_0}f(x)\right\}\overset{df}{\Leftrightarrow}\left\{\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ x\in\dot{u}_\delta(x_0+)\Rightarrow|f(x)-a|<\varepsilon\right\}.$$

Условие $x\in\dot{u}_\delta(x_0+)$ эквивалентно неравенству $x_0<x<x_0+\delta$. Геометрический смысл этого определения иллюстрируется рис. 2: если значения x попадают в интервал $(x_0,x_0+\delta)$, то соответствующие значения y попадают в интервал $(a,a+\varepsilon)$.

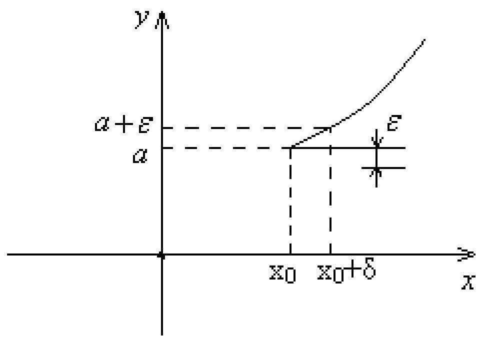


Рис. 2. Геометрический смысл определения предела функции при $x\to x_0+$.

Аналогично определяется предел функции при x стремящемся к x_0 слева.

Пример. Рассмотрим функцию $y = x \ln x$. Она определена только при $x > 0$. Поэтому не имеет смысла говорить о ее пределе при x стремящемся к x_0. Тем не менее, если вычислять значения этой функции для положительных x, все более и более близких к нулю, то значения y будут также все более и более близки к нулю. Более того, y будет сколь угодно мало отличаться от нуля, если только x достаточно близко к нулю, т.е. доказать, что

$$\lim_{x \to 0+} x \ln x = 0.$$

Позже это равенство будет доказано аналитически.

Пределы функции при $x \to x_0 +$ и при $x \to x_0 -$ будем называть *односторонними* пределами, а предел при $x \to x_0$ – *двусторонним*. Справедлива следующая теорема.

Теорема (о связи двустороннего предела функции с односторонними**).** Двусторонний предел функции при $x \to x_0$ существует тогда и только тогда, когда существуют оба соответствующих односторонних предела и они равны. При этом двусторонний предел равен односторонним.

Доказательство. Докажем эту теорему в два этапа. Сначала прямое утверждение, затем обратное.

1. Пусть существуют оба односторонних предела функции $f(x)$ и они равны a. Покажем, что в этом случае существует также двусторонний предел функции и он тоже равен a. Зададим произвольное сколь угодно малое $\varepsilon > 0$. Т.к. $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = a$, для этого ε существует такое $\delta_1 > 0$, что при $x \in \dot{u}_{\delta_1}(x_0+)$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Т.к. $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = a$, для этого ε существует такое $\delta_2 > 0$, что при $x \in \dot{u}_{\delta_2}(x_0-)$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Обозначим через δ наименьшее из чисел δ_1 и δ_2. Очевидно (рис. 3), что неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$ выполняется при $x \in \dot{u}_\delta(x_0)$. Последнее и означает, что существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

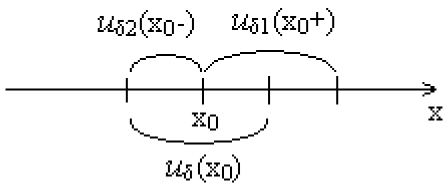


Рис. 3. Иллюстрация к доказательству теоремы о связи двустороннего предела функции с односторонними.

2. Пусть существует двусторонний предел функции $f(x)$ и он равен a. Покажем, что в этом случае существуют оба односторонних предела этой функции и они тоже равны a.

Зададим произвольное сколь угодно малое $\varepsilon > 0$. Т.к. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, для этого ε существует такое $\delta > 0$, что при $x \in \dot{u}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Но, следовательно, оно выполняется при $x \in \dot{u}_\delta(x_0-)$, так и при $x \in \dot{u}_\delta(x_0+)$. Первое означает, что существует $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = a$, а второе, что существует $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = a$.

Теорема доказана.

§2. Предел действительной функции одного действительного переменного ($R \to R$). Случай бесконечно удаленной предельной точки.

В предыдущем параграфе x_0 было конечным числом. Будем называть такую предельную точку *конечно-удаленной*. Дадим теперь определения пределов для случая *бесконечно-удаленной* предельной точки.

Число a называется пределом функции $y = f(x)$ при x стремящемся к $+\infty$, если при достаточно больших x значения y будут сколь угодно близки к числу a.

Более точно это определение формулируется так.

Опр. Число a называется пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к $+\infty$, если для любого, сколь угодно малого, положительного числа ε существует такое достаточно большое положительное число δ, что при $x > \delta$ выполняется неравенство $| f(x) - a | < \varepsilon$:

$$\left\{a = \lim_{x \to +\infty} f(x)\right\} \Leftrightarrow^{df} \left\{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ x > \delta \Rightarrow | f(x) - a | < \varepsilon\right\}.$$

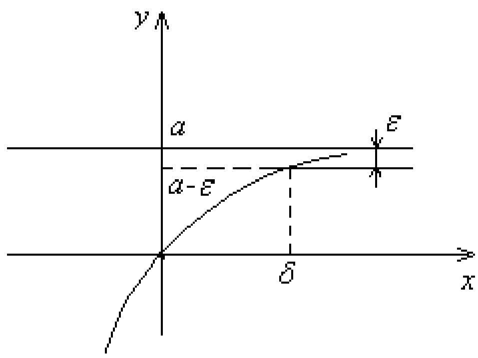


Рис. 4. Геометрический смысл предела функции при $x \to +\infty$.

Неравенство $x > \delta$ эквивалентно условию $x \in u_\delta(+\infty)$. Геометрический смысл этого определения представлен на рис. 4.

Аналогично определяется предел функции при x стремящемся к $-\infty$.

Говорят, что предел функции $f(x)$ при x стремящемся к бесконечности равен a, если при достаточно больших *по модулю* x значения функции сколь угодно близки к числу a. Более точно это определение формулируется следующим образом.

Опр. Число a называется пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к ∞, если для любого, сколь угодно малого, положительного числа ε существует такое достаточно большое положительное число δ, что при $| x | > \delta$ выполняется неравенство $| f(x) - a | < \varepsilon$:

$$\left\{a = \lim_{x \to +\infty} f(x)\right\} \Leftrightarrow^{df} \left\{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ |x| > \delta \Rightarrow | f(x) - a | < \varepsilon\right\}.$$

Неравенство $| x | > \delta$ эквивалентно условию $x \in u_\delta(\infty) = u_\delta(-\infty) \cup u_\delta(+\infty)$.

Другими словами, число a называется пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к бесконечности, если оно является пределом этой функции как при x стремящемся к $+\infty$, так и при x стремящемся к $-\infty$.

Геометрический смысл этого определения представлен на рис. 5.

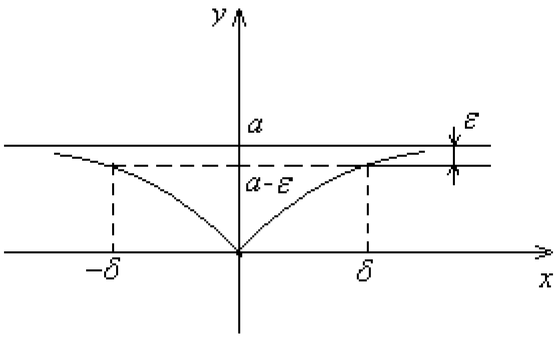


Рис. 5. Геометрический смысл предела функции при $x \to \infty$.

§3. Общее определение предела функции по Коши.

Объединим шесть введенных выше определений предела функции при различных стремлениях аргумента в одном общем определении. Для обозначения предельной точки будем использовать символ '*'. Т.е., под '*' будем подразумевать один из шести вариантов: $x_{0,} x_0+, x_0-, \infty, +\infty, -\infty$.

Опр. Число a называется пределом функции $f(x)$ при x стремящимся к *, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что в проколотой окрестности $\dot{u}_\delta(*)$ выполняется неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$:

$$\left\{a=\lim_{x\to *} f(x)\right\} \Leftrightarrow^{df} \left\{\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0:\ x\in \dot{u}_\delta(*) \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon\right\}.$$

Если предел функции $y=f(x)$ при $x\to *$ равен a, говорят также, что функция стремится к a при x стремящемся к $*$:

$y\to a$ при $x\to *$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Предел постоянной равен этой постоянной: $\lim\limits_{x\to *} C = C$.

Доказательство. Итак, пусть $f(x)=C=const$**.** Зададим произвольное $\varepsilon>0$**.** Выберем любое δ>0. Поскольку

$|f(x)-C|=|C-C|=0$,

очевидно, что $|f(x)-C|<\varepsilon$, в частности, при $x>\delta$. Но последнее и означает, что $\lim\limits_{x\to *} f(x)=C$.

Теорема доказана.

§4. Ограниченные и неограниченный функции. Бесконечно большие функции.

Опр. Функция y=f(x) называется ограниченной сверху на интервале (a,b), если

$\exists$ M$\in$R: f(x)<M, $\forall$x$\in (a,b)$

Опр. Функция y=f(x) называется ограниченной на интервале (a,b) снизу , если

$\exists$ m$\in$R: f(x)>m, $\forall$x$\in$B

Опр. Функция y=f(x) называется ограниченной на интервале (a,b), если она ограничена на этом интервале и снизу, и сверху.

Нетрудно показать, что функция является ограниченной на интервале (a,b) тогда и только тогда, когда

$\exists\ \mu \in R : |f(x)| < \mu\ \ \forall x \in (a,b)$.

Совершенно аналогично дается определение ограниченной (сверху, снизу) функции на сегменте или полуинтервале.

Опр. Функция называется локально ограниченной в * (или ограниченной при $x \to *$), если существует окрестность $\dot{u}_\delta$ (*), в которой эта функция ограничена.

Отсюда очевидно, что неограниченную в точке * функцию можно определить следующим образом:

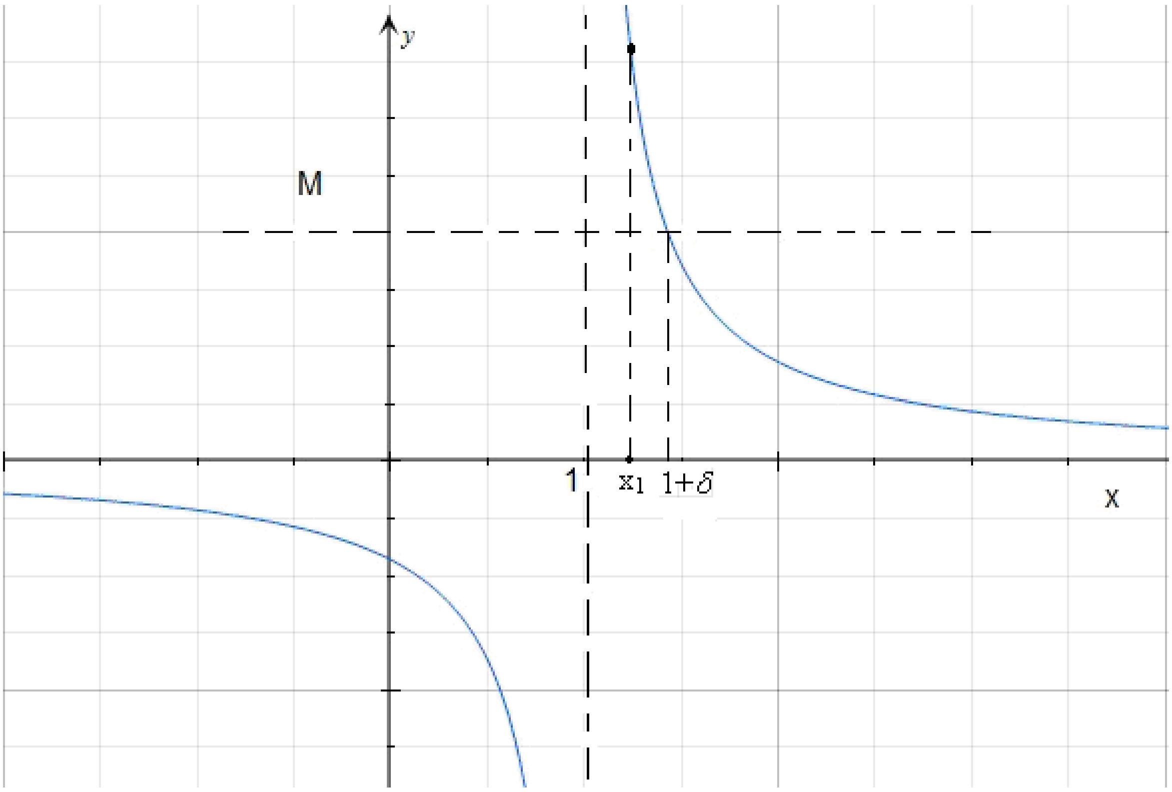


Рис. 6. Иллюстрация понятия неограниченной функции.

Опр. Функция называется неограниченной в точке * (при $x \to *$), если для любого (сколь угодно большого) числа $M > 0$ и для любого числа $\delta > 0$ найдется хотя бы одна точка $x_1 \in \dot{u}_\delta(*)$ такая, что $|f(x_1)| > M$:

$\forall M>0$ и $\forall \delta > 0\ \exists\ x_1 \in u_\delta(*)$: $|f(x_1)|>M$.

Так функция $y = \dfrac{1}{x-1}$, график которой представлен на рис. 6, является неограниченной при $x \to 1$ и ограниченной при любом другом стремлении x (в частности, при $x \to \infty$).

Опр. Функция f(x) называется бесконечно большой (*б.б.*) при $x \to *$, если

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) : x \in \dot{u}_\delta(*) \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$.

Если функция является бесконечно большой (б.б.) при $x \to *$, говорят, что ее предел при этом стремлении аргумента равен бесконечности:

$$\lim_{x \to *} f(x) = \infty .$$

Так функция, представленная на рис. 6, является бесконечно большой при $x \to 1$:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \infty .$$

Можно выделить два случая бесконечного предела (бесконечно большой функции): предел равный $+\infty$ и предел равный $-\infty$.

Опр. Говорят, что предел функции $f(x)$ при $x \to *$ равен $+\infty$, если для любого (сколь угодно большого) $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что в проколотой δ - окрестности $*$ выполняется неравенство $f(x) > \varepsilon$:

$$\left\{\lim_{x\to *} f(x) = +\infty\right\} \Leftrightarrow^{df} \left\{\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ x \in \dot{u}_{\delta}(*) \Rightarrow f(x) > \varepsilon\right\}.$$

Опр. Говорят, что предел функции $f(x)$ при $x \to *$ равен $-\infty$, если для любого (сколь угодно большого) $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что в проколотой δ -окрестности $*$ выполняется неравенство $f(x) < -\varepsilon$:

$$\left\{\lim_{x\to *} f(x) = +\infty\right\} \Leftrightarrow^{df} \left\{\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ x \in \dot{u}_{\delta}(*) \Rightarrow f(x) < -\varepsilon\right\}.$$

Пример. Рассмотрим снова функцию $y = \dfrac{1}{x-1}$ (рис. 6). Нетрудно видеть, что

$\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$, а $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$.

Замечание. Неограниченная функция не обязательно является бесконечно большой.

Пример. Функция $y = x \cdot \sin x$, график которой представлен на рис. 7, является неограниченной при $x \to \infty$, но не является бесконечно большой при этом стремлении аргумента. Действительно, для любых (сколь угодно больших) чисел $M > 0$ и $\delta > 0$ на множестве $|x| > \delta$ найдется точка x_1 (и не одна), в которой выполняется неравенство $|f(x)| > M$, поэтому функция неограниченна при $x \to \infty$. Но, с другой стороны, *во всех* точках множества $|x| > \delta$ (во всей δ -окрестности ∞) неравенство $|f(x)| > M$ выполняться не будет (функция периодически обращается в ноль), поэтому она не является бесконечно большой при $x \to \infty$.

Теорема. Функция, имеющая конечный предел при x→*, локально ограничена в точке *.

Доказательство. По условию теоремы, функция $f(x)$ имеет предел при $x \to *$:

$$\lim_{x\to *} f(x) = a .$$

Зададим $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$.

По определению предела, для этого ε найдется такое $\delta > 0$, что при $x \in \dot{u}_{\delta}(*)$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Раскрывая модуль, получим:

$$a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon ,$$

или

$$a - \frac{|a|}{2} < f(x) < a + \frac{|a|}{2} .$$

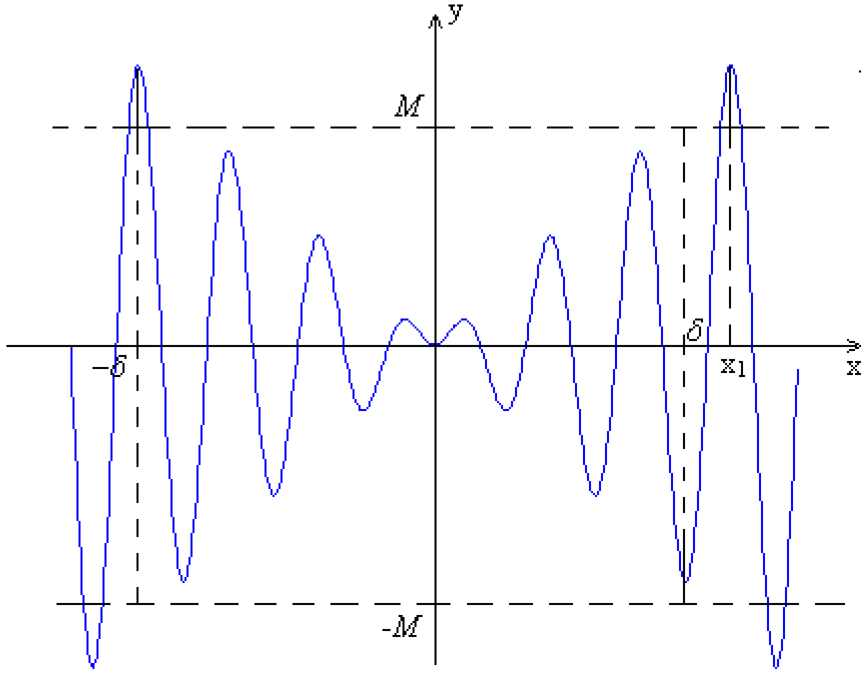


Рис. 7. График функции $y = x \cdot \sin x$.

При $a > 0$ имеем:

$$\frac{a}{2} < f(x) < \frac{3}{2}a.$$

При $a < 0$:

$$\frac{3}{2}a < f(x) < \frac{a}{2}.$$

В обоих случаях, существует такая окрестность $\dot{u}_\delta(*)$, в которой функция $f(x)$ ограничена и сверху (числом $M = a + \frac{|a|}{2}$) и снизу (числом $M = a - \frac{|a|}{2}$). Следовательно, функция локально ограниченная в точке *.

Теорема доказана.

В дальнейшем будет использоваться также следующая теорема, которую приведем здесь без доказательства.

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ при x→*, имеет конечный предел отличный от 0. Тогда функция $\frac{1}{f(x)}$ локально ограничена при x→*.

Лекция 4

§1. Бесконечно малые функции.

Опр. Функция f(x) называется бесконечно малой (*б.м.*) при x→*, если ее предел при этом стремлении равен нулю:

$$\{f(x) - б.м.\ \text{при}\ x \to *\} \overset{df}{\Leftrightarrow} \{\lim_{x \to *} f(x) = 0\}.$$

Другими словами, функция $f(x)$ называется б.м. при $x \to *$, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; x \in \dot{u}_\delta(*) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.

Пример. Функция $y = \dfrac{1}{x-1}$ (рис. 6, л. 3) является *б.м.* при $x \to \infty$. Функция $y = x \cdot \sin x$ (рис. 7, л.3.) является б.м. при $x \to \pi k$, при любом $k \in Z$ (в частности, при $x \to 0$).

§ 2. Теоремы о связи между функцией, её пределом и бесконечно малой.

Докажем прямую и обратную теоремы о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой.

Теорема. Если функция *y*=*f*(*x*) имеет конечный предел при $x \to *$, то её можно представить в виде суммы этого предела и бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x \to *$:

$$\left\{ \lim_{x \to *} f(x) = a \right\} \Rightarrow \left\{ f(x) = a + \alpha(x), \; \alpha(x) - б.м., \; x \to * \right\}.$$

Доказательство. Т.к. $\lim\limits_{x \to *} f(x) = a$ то $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; x \in \dot{u}_\delta(*) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$. Введем обозначение $\alpha(x) = f(x) - a$. Тогда $f(x) = a + \alpha(x)$. При этом $\alpha(x) -$ *б.м.* Действительно,

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; x \in \dot{u}_\delta(*) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$,

т.е.

$\lim\limits_{x \to *} \alpha(x) = 0$.

Теорема доказана.

Теорема. Если функция *y*=*f*(*x*) представима в виде суммы постоянной a и *б.м.* $\alpha(x)$ при x→*, то существует конечный предел этой функции при x→* и он равен a:

$$\left\{ f(x) = a + \alpha(x), \; \alpha(x) - б.м., \; x \to * \right\} \Rightarrow \left\{ \lim_{x \to *} f(x) = a \right\}.$$

Доказательство. Т.к. $\alpha(x)$ – *б.м.* при $x \to *$,

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; x \in \dot{u}_\delta(*) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$,

но

$\alpha(x) = f(x) - a$.

Следовательно,

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; x \in \dot{u}_\delta(*) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$,

но это и означает, что

$\lim\limits_{x \to *} f(x) = a$.

Теорема доказана.

§ 3. Свойства бесконечно малых.

Теорема. Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая при *x*→*, то она локально ограничена при этом стремлении аргумента.

Доказательство. Зададим произвольной число $\varepsilon > 0$ Т.к. $\alpha(x)$ - *б.м.* при $x \to *$, т.е. $\lim\limits_{x\to *}\alpha(x) = 0$, то для этого ε существует $\dot{u}_\delta(*)$, в которой $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Значит внутри окрестности $\dot{u}_\delta(*)$ функция $\alpha(x)$ ограничена, причем ε - верхняя и нижняя грань. Таким образом, функция $\alpha(x)$ локально ограничена при $x \to *$.

Теорема доказана.

Теорема. Алгебраическая сумма конечного числа *б.м.* – есть *б.м.*:
$\{\alpha(x), \beta(x)$ – *б.м.* при $x \to *\} \Rightarrow \{h(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ – *б.м.* при $x \to *\}$

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и обозначим $\gamma = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$\begin{cases} \exists\delta_1 : x \in \dot{u}_{\delta_1}(*) \Rightarrow |\alpha(x)| < \gamma \\ \exists\delta_2 : x \in \dot{u}_{\delta_2}(*) \Rightarrow |\beta(x)| < \gamma \end{cases}$$

Обозначим через $\dot{u}_\delta(*)$ пересечение δ_1- и δ_2- окрестностей *: $\dot{u}_\delta(*) = \dot{u}_{\delta_1}(*) \cap \dot{u}_{\delta_2}(*)$. Соответственно, δ - радиус окрестности $\dot{u}_\delta(*)$ (например, если $* = x_0$ - конечно-удаленная предельная точка, то $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и пересечение окрестностей есть наименьшая из этих окрестностей, рис. 1). Тогда при x ∈ $\dot{u}_\delta(*)$ выполняются одновременно оба неравенства: $\begin{cases} |\alpha(x)| < \gamma \\ |\beta(x)| < \gamma \end{cases}$.

Но

$$|\alpha(x) + \beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < 2\gamma = \varepsilon.$$

Таким образом, показано, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta : x \in \dot{u}_\delta(*) \Rightarrow |\alpha(x) + \beta(x)| < \varepsilon$, что и означает, что

$$\lim_{x\to *}(\alpha(x) + \beta(x)) = 0,$$

т.е. сумма $h(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ - есть б.м. при $x \to *$.

Теорема доказана.

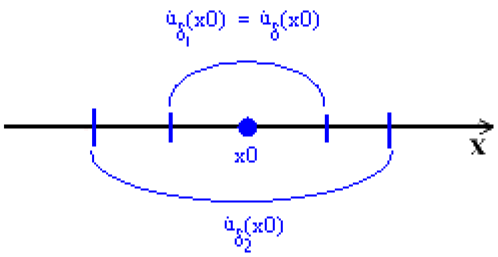


Рис. 1. Иллюстрация понятия пересечения окрестностей.

Нетрудно убедиться, что эта теорема справедлива для любого конечного числа слагаемых.

Теорема. Произведение б.м. $\alpha(x)$ при $x \to *$ на локально ограниченную $f(x)$ при этом стремлении есть функция б.м. при $x \to *$.

Доказательство. В силу локальной ограниченности $f(x)$ $\exists$ такое M, что в некоторой окрестности $\dot{u}_{\delta_1}(*)$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \le M. \qquad (1)$$

Зададим произвольное сколь угодно малое положительное ε. Обозначим $\gamma = \dfrac{\varepsilon}{M}$. Т.к. $\lim\limits_{x\to *}\alpha(x) = 0$, найдется окрестность $\dot{u}_{\delta_2}(*)$, в которой выполняется неравенство

$$|\alpha(x)\}| < \gamma . \qquad (2)$$

В окрестности $\dot{u}_{\delta}(*) = \dot{u}_{\delta_1}(*) \cap \dot{u}_{\delta_2}(*)$ выполняются оба неравенства (1) и (2), и

$$|\alpha(x)\cdot f(x)| = |\alpha(x)|\cdot|f(x)| < \gamma\cdot M = \frac{\varepsilon}{M}\cdot M = \varepsilon .$$

Таким образом, показано, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \dot{u}_{\delta}(*):\ x\in\dot{u}_{\delta}(*) \Rightarrow |\alpha(x)\cdot f(x)| < \varepsilon .$$

Последнее означает, что

$\lim\limits_{x\to *}\alpha(x) f(x) = 0$, т.е. функция $h(x) = \alpha(x)\cdot f(x)$ есть бесконечно малая при $x \to *$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Произведение конечного числа б.м. – есть б.м.

Следствие 2. Произведение б.м. на постоянную – есть б.м.

Теорема 4. Если б.м. функция есть постоянная, то она равна нулю (тождественно). Доказательство этой теоремы достаточно очевидно и мы его опускаем.

§ 4. Теоремы о связи б.м. и б.б. функций.

Докажем две теоремы – прямую и обратную.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ – б.б. при x→*, то функция $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ – б.м. при этом стремлении аргумента.

Доказательство. Зададим произвольное ε > 0 и обозначим M = $\frac{1}{\varepsilon}$.

Т.к. $f(x)$ – *б.б.* при x→∞ (т.е. $\lim\limits_{x\to *} f(x) = \infty$), то ∃ δ: $x\in\dot{u}_{\delta}(*)$ $\Rightarrow$ $|f(x)| > M$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| < \frac{1}{M} = \varepsilon \ \Rightarrow\ \lim_{x\to *}\frac{1}{f(x)} = 0 ,$$

т.е.

$g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ - *б.м.* при $x \to *$

Теорема доказана.

Пример. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2} = 0$.

Символически эту теорему можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0 .$$

Теорема 2. Если функция $f(x)$ – б.м. при x→* и существует окрестность $\dot{u}_{\delta_1}(*)$, в которой $f(x) \neq 0$, то функция $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ - б.б. при этом стремлении аргумента.

Доказательство. Зададим произвольное M > 0 и обозначим $\varepsilon = \dfrac{1}{M}$. Т.к. $f(x)$ - *б.м.* при x→*, для этого ε ∃ $\dot{u}_{\delta_2}(*)$, внутри которой $|f(x)| < \varepsilon$. Внутри окрестности $\dot{u}_{\delta}(*) = \dot{u}_{\delta_1}(*) \cap \dot{u}_{\delta_2}(*)$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon} = M .$$

Следовательно, функция $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ – *б.б.* при x→*.

Теорема доказана.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3} = \infty$ **.**

Символически эту теорему можно записать в виде:

$$\frac{1}{0} = \infty .$$

§ 5. Единственность предела.

Теорема. (О единственности предела). Если предел функции $f(x)$ существует, то он единственен.

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Допустим ∃ два предела: $\lim\limits_{x\to *} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x\to *} f(x) = b$, причем $a \neq b$. На основании 1-ой (прямой) теоремы о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой,

$$\begin{cases} f(x) = a + \alpha(x) \\ f(x) = b + \beta(x) \end{cases}, \text{ где } \alpha(x) \text{ и } \beta(x) \text{ – б.м. при } x \to *.$$

Вычитая от второго равенства первое, получим: $0 = b - a + \beta(x) - \alpha(x) = b - a + \gamma(x)$.
Поскольку сумма б.м. есть б.м. (см. свойства б.м.), то $\gamma(x) = \beta(x) - \alpha(x)$ – б.м. при x→*. С другой стороны, $\gamma(x) = a - b = const$. Однако, как было сказано ранее, если б.м. – есть постоянная, то она тождественно равна нулю (см. свойства б.м.). Таким образом, $\gamma(x) = a - b = 0$, а следовательно $a = b$. Последнее противоречит сделанному предположению о существовании двух различных пределов, а значит предел единственен.

Теорема доказана.

§ 6. Арифметические свойства предела.

Теорема. Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to *} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to *} g(x) = b$. Тогда существует конечный предел суммы функций $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ при x→* и он равен $a + b$:

$$\lim_{x\to *}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to *} f(x) + \lim_{x\to *} g(x) .$$

Доказательство. На основании 1-ой (прямой) теоремы о связи функции, ее предела и бесконечно малой, функции *f* и *g* представимы в виде

$$f(x) = a + \alpha(x) , \quad g(x) = b + \beta(x) ,$$

где α и β - б.м. при $x \to *$. Следовательно,

$$\varphi(x) = f(x) + g(x) = a + b + \alpha(x) + \beta(x) = c + \gamma(x),$$

где $c = a + b$ – постоянная, а $\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ - б.м. (как сумма двух б.м.). На основании 2-ой (обратной) теоремы о связи функции, ее предела и бесконечно малой, $\lim\limits_{x \to *} \varphi(x) = c = a + b$.

Теорема доказана.

Теорема. Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to *} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to *} g(x) = b$. Тогда существует также конечный предел произведения функций $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$ и он равен $a \cdot b$:

$$\lim_{x \to *} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to *} f(x) \cdot \lim_{x \to *} g(x).$$

Доказательство. Т.к. $\lim\limits_{x \to *} f(x) = a$, а $\lim\limits_{x \to *} g(x) = b$, то по 1-ой (прямой) теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

$$\begin{cases} f(x) = a + \alpha(x) \\ g(x) = b + \beta(x) \end{cases}.$$

Следовательно,

$$\varphi(x) = f(x) \cdot g(x) = (a + \alpha)(b + \beta) = ab + \alpha b + \beta a + \alpha\beta = ab + \gamma,$$

где

$$\gamma = \alpha\beta + \alpha B + \beta A.$$

Слагаемые αb и βa являются произведениями б.м. на постоянную, а значит б.м. (см. свойства б.м.). Слагаемое $\alpha\beta$ - произведение двух б.м., а следовательно тоже б.м. Таким образом, γ - б.м. По 2-ой (обратной) теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой,

$$\lim_{x \to *} \varphi(x) = a \cdot b.$$

Теорема доказана.

Следствие. Постоянную можно выносить за знак предела. Действительно, пусть c - постоянная. Тогда

$$\lim_{x \to *} (c \cdot f(x)) = \lim_{x \to *} c \cdot \lim_{x \to *} f(x) = c \cdot \lim_{x \to *} f(x)$$

(поскольку предел постоянной равен этой постоянной).

Теорема. Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to *} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to *} g(x) = b$. И пусть $b \neq 0$. Тогда существует предел частного $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, и он равен $\dfrac{a}{b}$:

$$\lim_{x \to *} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to *} f(x)}{\lim\limits_{x \to *} g(x)}.$$

Эта теорема доказывается аналогично предыдущим, поэтому доказательство опустим.

Пример. Предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3}{2x^2-x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

Здесь имеет место неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$, поэтому использовать теорему о пределе отношения в исходном пределе невозможно (не существуют конечные пределы как числителя, так и знаменателя). Однако, этой теоремой можно воспользоваться после деления числителя и знаменателя дроби на x^2, равно как и теоремой о пределе суммы. Окончательный результат получаем с учетом того, что

$$\frac{1}{x}\to 0 \text{ и } \frac{1}{x^2}\to 0 \text{ при } x\to\infty$$

(по теореме о связи б.б. и б.м. функций),
а постоянную можно выносить за знак предела.

§7. Теоремы о переходе к пределу в неравенствах.

Теорема (о сохранении функцией знака предела). Если при $x\to *$ функция имеет предел отличный от нуля, то существует проколотая окрестность $\dot{u}_\delta(*)$, внутри которой знак функции совпадает со знаком ее предела.

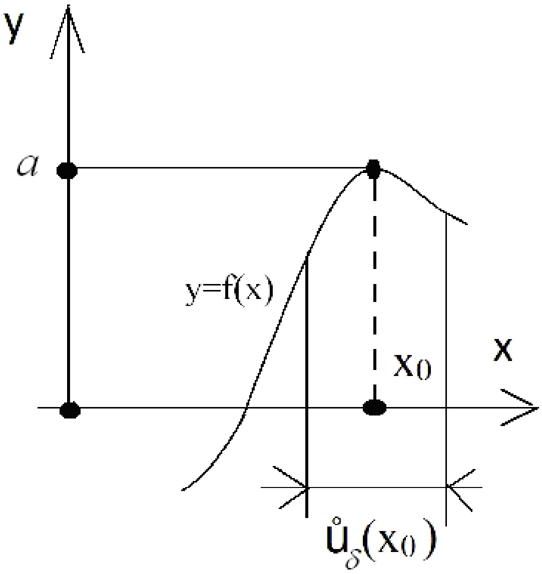


Рис. 2. Иллюстрация теоремы о сохранении функцией знака предела.

Доказательство. Докажем эту теорему для случая положительного предела. Для случая отрицательного предела доказательство аналогично.

Пусть $\lim\limits_{x\to *} f(x)=a>0$. Положим $\varepsilon=\frac{|a|}{2}$.

По определению предела, $\exists \dot{u}_\delta(*):\ x\in\dot{u}_\delta(*)\ \Rightarrow\ |f(x)-a|<\frac{|a|}{2}$

Раскрывая модуль, получим:

$$a-\frac{|a|}{2}<f(x)<a+\frac{|a|}{2}$$

При $a > 0$ имеем $|a| = a$ и

$$\frac{a}{2} < f(x) < \frac{3}{2}a .$$

Из левого неравенства видим, что $f(x) > \frac{a}{2} > 0$.

Таким образом, существует $\dot{u}_{\delta}(*)$, внутри которой $f(x) > 0$.
При $a < 0$ имеем $|a| = -a$ и

$$\frac{3}{2}a < f(x) < \frac{a}{2} .$$

Из правого неравенства видим, что $f(x) < \frac{a}{2} < 0$.

Таким образом, существует $\dot{u}_{\delta}(*)$, внутри которой $f(x) < 0$.

Теорема доказана.

На рис. 2 представлена иллюстрация этой теоремы для случая конечно-удаленной предельной точки ($* = x_0$) и $a > 0$.

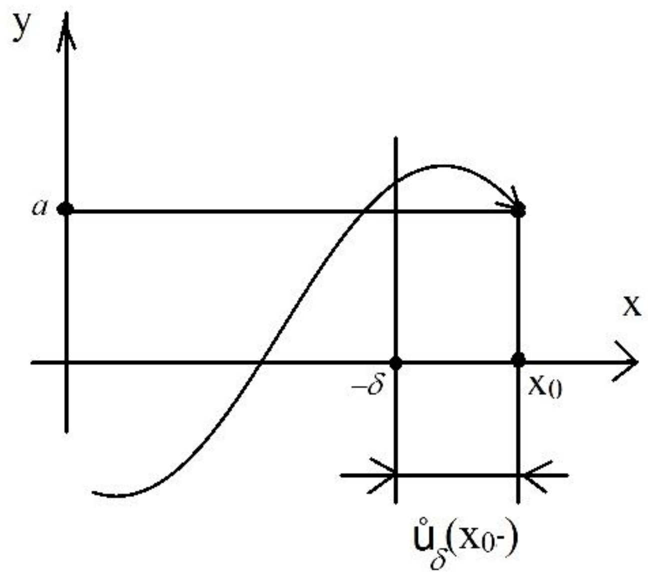


Рис. 3. Иллюстрация следствия теоремы о сохранении функцией знака предела.

Следствие. Если $f(x) \geq 0$ в некоторой окрестности $\dot{u}_{\delta}(*)$ и существует $\lim\limits_{x \to *} f(x) = a$, то $a \geq 0$.

Действительно, если бы выполнялось неравенство $a < 0$, то из доказанной теоремы следовало бы, что $\exists \dot{u}_{\delta 1}(*)$, внутри которой $f(x) < 0$, что противоречит условию (существованию окрестности, в которой $f(x) \geq 0$).

Рис. 3 иллюстрирует данное следствие для случая $* = x_0 -$.

Теорема (о переходе к пределу в неравенстве). Пусть в некоторой окрестности $\dot{u}_{\delta}(*)$ выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$, и пусть существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to *$: $\lim\limits_{x \to *} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to *} g(x) = b$.

Тогда имеет место неравенство: $a \leq b$.

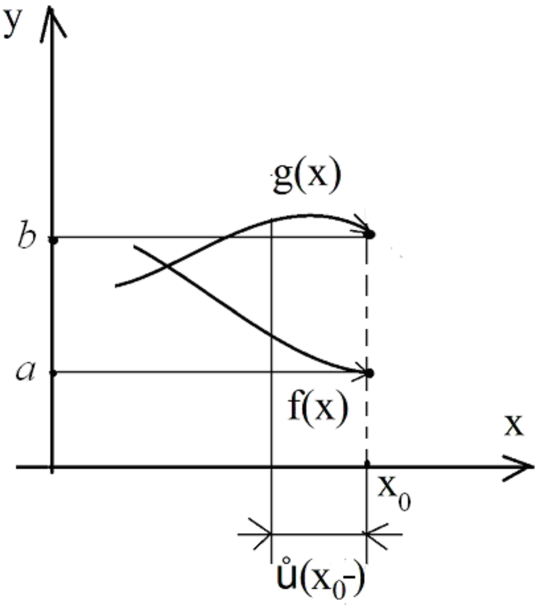


Рис. 4. Иллюстрация теоремы о переходе к пределу в неравенстве.

Доказательство. Внутри $\dot{u}_\delta(*)$, в которой $g(x) \ge f(x)$, функция $\varphi(x) = g(x) - f(x) \ge 0$, но в силу следствия теоремы 1 это значит, что $\exists \lim\limits_{x\to *}(g(x) - f(x)) \ge 0$.

Используя арифметические свойства предела, получим:

$$\exists \lim_{x\to *}(g(x) - f(x)) = \lim_{x\to *} g(x) - \lim_{x\to *} f(x) \ge 0,$$

следовательно

$$\lim_{x\to *} g(x) \ge \lim_{x\to *} f(x),$$

т.е.

$$a \le b.$$

Теорема доказана.

Рис. 4 иллюстрирует данную теорему для случая $* = x_0 -$.

Теорема (о пределе промежуточной функции). Пусть в некоторой окрестности $\dot{u}_{\delta_0}(*)$ выполняется неравенство $f(x) \le \varphi(x) \le g(x)$ и пусть существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to *$, причем они равны:

$$\lim_{x\to *} f(x) = \lim_{x\to *} g(x) = a$$

Тогда существует $\lim\limits_{x\to *}\varphi(x)$ и он равен a.

Доказательство. Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$.

$$\left\{\lim_{x\to *} f(x) = a\right\} \Rightarrow \left\{\exists \delta_1 > 0:\ x \in \dot{u}_{\delta 1}(*) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon\right\},$$

$$\left\{\lim_{x\to *} g(x) = a\right\} \Rightarrow \left\{\exists \delta_2 > 0:\ x \in \dot{u}_{\delta 2}(*) \Rightarrow |g(x) - a| < \varepsilon\right\}$$

Обозначим $\dot{u}_\delta(*) = \dot{u}_{\delta_1}(*) \cap \dot{u}_{\delta_2}(*)$. Видим, что, при $x \in \dot{u}_\delta(*)$,

$$\begin{cases} |f(x) - a| < \varepsilon \\ |g(x) - a| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon \\ a - \varepsilon < g(x) < a + \varepsilon \end{cases}$$

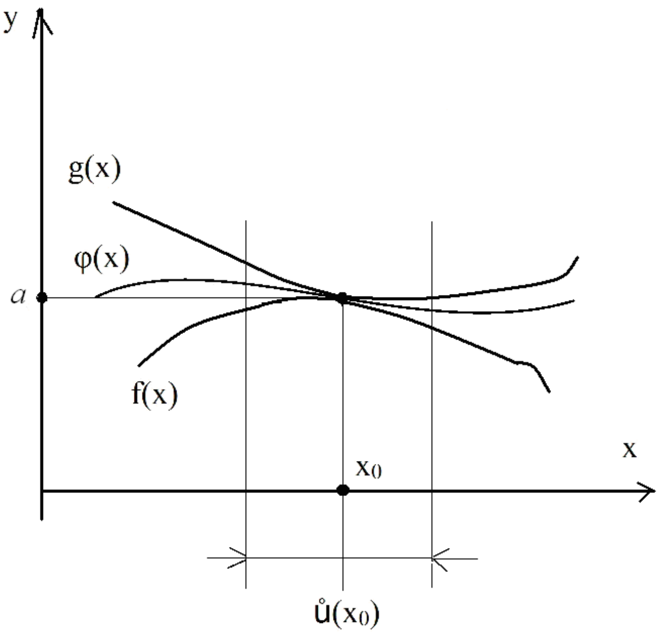


Рис. 5. Иллюстрация теоремы о пределе промежуточной функции.

Имеем:

$$a-\varepsilon < f(x) \le \varphi(x) \le g(x) < a+\varepsilon .$$

Таким образом, внутри окрестности $\dot{u}_\delta(*)$ выполняется неравенство $a-\varepsilon < \varphi(x) < a+\varepsilon$.
Итак, мы показали, что

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: \; x \in \dot{u}_\delta(*) \Rightarrow |\varphi(x)-a| < \varepsilon ,$$

но это и означает, что существует $\lim\limits_{x\to *}\varphi(x)=a$.

Теорема доказана.

Рис. 5 иллюстрирует данную теорему для случая $* = x_0$.

§8. Предел сложной функции.

Теорема (о пределе сложной функции). Пусть $y=f(x)$, $z=g(y)$ и пусть существуют пределы $\lim\limits_{x\to *} f(x)=a$ и $\lim\limits_{y\to a} g(y)=b$. Тогда существует предел сложной функции $g(f(x))$ при $x\to *$ и этот предел равен b:

$$\lim_{x\to *} g(f(x))=b .$$

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon>0$. Т.к. $\lim\limits_{y\to a} g(y)=b$, то

$$\exists \delta > 0: \; |y-a|<\delta \Rightarrow |g(y)-b|<\varepsilon ,$$

но т.к.

$$\lim_{x\to *} f(x)=a \text{, то } \exists \gamma > 0: \; x\in \dot{u}_\gamma(*) \Rightarrow |f(x)-a|<\delta .$$

Итак

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \gamma: \; x \in \dot{u}_\gamma(*) \Rightarrow |f(x)-a|<\delta \Rightarrow |g(y)-b|<\varepsilon ,$$

т.е.

$$\lim_{x\to *} g(f(x))=b .$$

Теорема доказана.

Пример. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ отсюда следует, что

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn} = e^k$. При этом роль внутренней функции играет $y = f(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, а роль внешней функции – $g(y) = y^k$. Теорема о пределе сложной функции позволяет использовать при вычислении пределов метод, называемый *заменой переменной*:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn} = \lim_{y\to e} y^k = e^k,$$

где $y = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, при $n\to\infty$ $y\to e$.

Здесь n – старая переменная, а y – новая переменная. Замена переменной описана в фигурных скобках.

Пример. Предел

$$\lim_{x\to 0+} 2^{-\frac{1}{x}} = 0,$$

т.к. внутренняя функция $y = -\frac{1}{x} \to -\infty$ при $x\to 0+$, а внешняя функция $g(y) = 2^y \to 0$ при $y\to -\infty$ (представьте себе график функции $y = 2^x$).

Лекция 5

§1. Первый замечательный предел и его следствия.

Теорема (о первом замечательном пределе). Предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Доказательство. Т.к. функция $y = \frac{\sin x}{x}$ четная, то достаточно ограничиться случаем, когда $x\to 0+$ ($x > 0$). Очевидно, что характер стремления y при $x\to 0-$ тот же самый.
На рис. 1 представлен тригонометрический круг радиусом R=1. x - это угол, отрезок BC – линия синуса ($BC = \sin x$), отрезок AD – линия тангенса ($AD = tgx$). Сравним площади

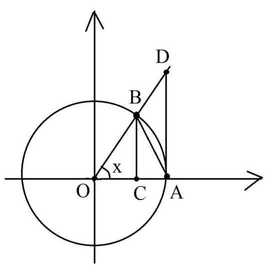


Рис. 1. Иллюстрация к теореме
о первом замечательном пределе.

треугольника AOB, кругового сектора AOB и треугольника AOD. Очевидно,

$$S_{\Delta AOB} < S_{сектораAOB} < S_{\Delta AOD}.$$

Подставляя в это неравенство выражения для площадей:

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot BC = \frac{1}{2}\sin x$$

$$S_{сектораAOB}=\frac{1}{2}R^2x=\frac{1}{2}x$$

$$S_{\Delta AOD}=\frac{1}{2}OA\cdot AD=\frac{1}{2}tgx,$$

получим

$$\sin x<x<tgx.$$

Или, после деления на $\sin x$:

$1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$, т.е. $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$.

Т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ и $\lim\limits_{x\to 0}1=1$, то на основании теоремы о пределе промежуточной функции заключаем, что

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1.$$

В силу четности функции $\dfrac{\sin x}{x}$, очевидно, что двусторонний предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Теорема доказана.

Предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

называется *первым замечательным пределом*.

Рассмотрим ряд следствий доказанной теоремы.

Следствие 1. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(ax)}{x}=a$.

Действительно, выполнив замену переменной $y=ax$ (при $x\to 0$ $y\to 0$), получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}=a\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=a,$$

Следствие 2. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$.

Действительно, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$

(поскольку оба последних предела равны единице). При доказательстве использована теорема о пределе произведения функций.

Следствие 3. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$.

Действительно, после замены переменной $y=\arcsin x$ (при $x\to 0$ $y\to 0$), рассматриваемый предел преобразуется к виду

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\left(\dfrac{\sin y}{y}\right)}=\frac{\lim\limits_{y\to 0}1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}}=1$$

(поскольку и предел числителя, и предел знаменателя равны единице). Здесь использовалась теорема о пределе отношения двух функций.

Следствие 4. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}=1$

Доказывается аналогично предыдущему.

Следствие 5. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.

Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Здесь использовано следствие 1.

§2. Второй замечательный предел.

Как известно, предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx 2.718$. Это равенство справедливо и для соответствующего предела функции $R\to R$.

Теорема (о втором замечательном пределе). Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ называют *вторым замечательным пределом*.

Докажем ряд следствий сформулированной теоремы.

Следствие 1. Предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Действительно, после замены переменной $y=\frac{1}{x}$ ($x=\frac{1}{y}$, при $x\to 0$ $y\to\infty$), рассматриваемый предел преобразуется ко второму замечательному:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^y=e.$$

Отметим, что предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$ также называют вторым замечательным пределом.

Следствие 2. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to e}\ln y=\ln e=1.$$

Здесь использовано свойство логарифма: $k\ln t=\ln t^k$ и замена переменной $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ (при $x\to 0$ $y\to e$).

Следствие 3. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

Действительно, путем замены переменной $y=e^x-1$ (при $x\to 0$ $y\to 0$) и использования теоремы о пределе отношения, данный предел сводится к предыдущему.

Следствие 4. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a$.

Действительно, введя замену переменной $y=\frac{a}{x}$ ($x=\frac{a}{y}$, при $x\to 0$ $y\to 0$), получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=\lim_{y\to 0}\left(1+y\right)^{\frac{a}{y}}=\lim_{y\to 0}\left[\left(1+y\right)^{\frac{1}{y}}\right]^a=e^a,$$
в силу следствия 1 и теоремы о пределе сложной функции.

§3. Сравнение функций при данном стремлении аргумента.

Пусть две б.м. (две б.б.) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в окрестности $\dot{u}_\delta(*)$, и пусть существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to *}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Опр. Если $\lim\limits_{x\to *}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, говорят, что б.м. $f(x)$ имеет высший порядок малости (в.п.м.) по сравнению с б.м. $g(x)$ при $x\to *$ (б.б. $g(x)$ имеет высший порядок роста (в.п.р.) по сравнению с б.б. $f(x)$ при $x\to *$). При этом используется следующее обозначение:

$$f(x)=o(g(x)),\ x\to *.$$

Примеры.

$(\sin x)^2=o(x)$ при $x\to 0$.

Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\sin x=0,$$

т.к. первый сомножитель под знаком предела стремится к единице, а второй – к нулю.

$$\frac{1}{x^2}=o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ при } x\to\infty,$$

но

$$\frac{1}{x}=o\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ при } x\to 0$$

(докажите самостоятельно).

Замечание. Если $\lim\limits_{x\to *}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$, очевидно, это означает, что $\lim\limits_{x\to *}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$ (по теореме о связи между б.м. и б.б.), т.е. $g(x)=o(f(x)),\ x\to *$.

Опр. Если существует конечный $\lim\limits_{x\to *}\dfrac{f(x)}{g(x)}=a\neq 0$, то $f(x)$ и $g(x)$ называются б.м. (б.б.) *одного порядка малости* (*роста*) при $x\to *$.

Примеры.

Функции $y=shx$ и $y=e^x$ имеют одинаковый порядок роста при $x\to +\infty$.

Действительно,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{shx}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{2e^x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(1-e^{-2x}\right)=\frac{1}{2}\neq 0\vee\infty$$

(здесь использовано то, что $e^{-2x}\to 0$ при $x\to+\infty$).

Функции $y=e^x-1$ и $y=\sin 2x$ имеют одинаковый порядок малости при $x\to 0$ (докажите самостоятельно).

Опр. $\lim\limits_{x\to *}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными при $x\to *$. При этом используется обозначение:

$$f(x)\sim g(x) \text{ при } x\to *.$$

Примеры.

$\sin x\sim x$ при $x\to 0$, в силу теоремы о первом замечательном пределе.

$tgx\sim x$ при $x\to 0$, в силу следствия из теоремы о первом замечательном пределе ($\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$).

Многочлен

$$3x^3+x^2+5x\sim 3x^3 \text{ при } x\to\infty.$$

Действительно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+x^2+5x}{3x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}+\frac{5}{x^2}\right)=1,$$

т.к. два последних слагаемых под знаком предела стремятся к нулю.

Тот же многочлен

$$3x^3+x^2+5x\sim 5x \text{ при } x\to 0.$$

(докажите самостоятельно).

Опр. Если существует конечный предел

$$\lim_{x\to *}\frac{f(x)}{g^k(x)}=a\neq 0, \text{ где } k>0,$$

число k называется *порядком малости* (*роста*) $f(x)$ относительно $g(x)$ при $x\to *$.

Пример. Сравним функции $f(x)=\sin x^2$, $g(x)=x^3$ при $x\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g^k(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^{3k}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot\frac{1}{x^{3k-2}}.$$

Этот предел конечен и отличен от нуля только при $k=\dfrac{2}{3}$. Действительно, в этом случае получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1,$$

где $t=x^2$.

При $k>\dfrac{2}{3}$ предел равен ∞, а при $k<\dfrac{2}{3}$ – нулю.

Таким образом, порядок малости б.м. $f(x)$ относительно б.м. $g(x)$ при $x\to 0$ равен $k=\dfrac{2}{3}$.

§4. Основные соотношения эквивалентности.

Из определения эквивалентности функций, а также теорем о первом и втором замечательных пределах и их следствий, вытекают следующие соотношения эквивалентности при $x\to 0$:

$\sin x\sim x$

$tgx\sim x$

$\arcsin x\sim x$

$arctgx\sim x$

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$$
$$\ln(1+x) \sim x$$
$$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$$
$$e^x - 1 \sim x$$
$$a^x - 1 \sim x \ln a$$
$$\sqrt[p]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{p}$$

Исходя из определения эквивалентности, легко доказать также, что многочлен эквивалентен старшей степени при $x \to \infty$ и младшей степени (если $a_0 = 0$) при $x \to 0$ (см. последние два примера к определению эквивалентности):

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \sim a_n x^n \text{ при } x \to \infty.$$
$$a_1 x + \ldots + a_n x^n \sim a_1 x \text{ при } x \to 0.$$

§5. Теоремы об эквивалентных функциях.

Теорема. Если при $x \to *$ $f(x) \sim \varphi(x)$ и $g(x) \sim \varphi(x)$, то $f(x) \sim g(x)$.

Доказательство.

$$\lim_{x\to *}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to *}\frac{f(x)}{\varphi(x)}\cdot\frac{\varphi(x)}{g(x)} = \lim_{x\to *}\frac{f(x)}{\varphi(x)}\cdot\lim_{x\to *}\frac{\varphi(x)}{g(x)} = 1\cdot 1 = 1,$$

следовательно

$$f(x) \sim g(x) \text{ при } x \to *.$$

Теорема доказана.

Теорема. Разность 2-х эквивалентных б.м. функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет высший порядок малости по сравнению с каждой из них.

Доказательство. Пусть $f(x) \sim g(x)$ при $x \to *$. Покажем, что

$$f(x) - g(x) = o(g(x)) \text{ при } x \to *.$$

$$\lim_{x\to *}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to *}\left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right) = \lim_{x\to *}\frac{f(x)}{g(x)} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Следовательно,

$$f(x) - g(x) = o(g(x)) \text{ при } x \to *.$$

Поскольку же $f(x) \sim g(x)$, то, очевидно также, что $f(x) - g(x) = o(g(x))$.

Теорема доказана.

Теорема. Если разность двух функций $f(x) - g(x)$ есть бесконечно малая функция по сравнению с одной из них при $x \to *$, то эти функции эквивалентны:

Доказательство. Пусть, для определенности, $f(x) - g(x) = o(g(x))$ при $x \to *$. Тогда

$$\lim_{x\to *}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to *}\left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right) = \lim_{x\to *}\frac{f(x)}{g(x)} - 1 = 0$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to *}\frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

т.е.

$f(x) \sim g(x)$ при $x \to *$.

Теорема доказана.

Теорема. Сумма бесконечно малых (бесконечно больших) различного порядка малости эквивалентна слагаемому низшего порядка малости (высшего порядка роста).

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ б.м. (б.б.) при $x \to *$, причем $\beta = o(\alpha)$. Тогда

$$\lim_{x\to *} \frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to *}\left(1+\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right) = 1 + \lim_{x\to *}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1.$$

Следовательно,

$\alpha(x)+\beta(x) \sim \alpha(x)$ при $x \to *$.

Теорема доказана.

Нетрудно убедиться, что эта теорема справедлива для любого конечного числа слагаемых.

Пример. $x^{3/2} + 2\sqrt{x} \sim 2\sqrt{x}$ при $x \to 0+$

Соотношения эквивалентности для многочлена при $x \to 0$ или при $x \to \infty$ являются следствиями доказанной теоремы.

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых (двух бесконечно больших) функций не изменится при замене этих функций на эквивалентные, т.е.
если $f(x) \sim f_0(x)$ при $x \to *$, а $g(x) \sim g_0(x)$ при $x \to *$, то

$$\lim_{x\to *}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to *}\frac{f_0(x)}{g_0(x)}.$$

Доказательство.

$$\lim_{x\to *}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to *}\frac{f(x)}{f_0(x)}\cdot\frac{g_0(x)}{g(x)}\cdot\frac{f_0(x)}{g_0(x)} = \lim_{x\to *}\frac{f(x)}{f_0(x)}\cdot\lim_{x\to *}\frac{g_0(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to *}\frac{f_0(x)}{g_0(x)} = \lim_{x\to *}\frac{f_0(x)}{g_0(x)}.$$

Теорема доказана.

§6. Использование соотношений эквивалентности для вычисления пределов и асимптотического сравнения функций.

Последняя теорема, вместе с таблицей эквивалентных функций, является основой наиболее удобного и широко используемого метода вычисления пределов.

Пример. Найдем предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)\cdot(\sin x)^2}{5x^4+x^6}.$$

Поскольку при $x \to 0$ $\ln(1+x^2) \sim x^2$ ($\ln(1+t) \sim t$ при $t \to 0$, $t = x^2$), $\sin x \sim x$, $5x^4 + x^6 \sim 5x^4$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)\cdot(\sin x)^2}{5x^4+x^6} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x^2}{5x^4} = \frac{1}{5}.$$

Соотношения эквивалентности (табл. 1) удобно также использовать для асимптотического сравнения функций.

Пример. Предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(1-\cos x))}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Здесь использованы соотношения эквивалентности $\ln(1+t) \sim t$ при $t \to 0$ ($t = 1-\cos x$) и $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$.

Пример. Предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{tg\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2/x}{1/x} = 2.$$

Здесь использованы соотношения эквивалентности $e^t - 1 \sim t$ при $t \to 0$ ($t = \frac{2}{x}$, очевидно, что при $x \to \infty$ $t \to 0$) и $tgt \sim t$ при $t \to 0$ $\left(t = \frac{1}{x}\right)$.

Пример. Предел

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\cos\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{y} = -\lim_{y\to 0} \frac{\sin\frac{y}{2}}{y} = -\lim_{y\to 0} \frac{y}{2y} = -\frac{1}{2}.$$

Здесь использована замена переменной $y = x - \pi$ ($x = y + \pi$, $y \to 0$ при $x \to \pi$), формула приведения $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$ и соотношение эквивалентности $\sin t \sim t$ при $t \to 0$ $\left(t = \frac{y}{2}\right)$.

Пример. Предел

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \overset{1^\infty}{=} \lim_{x\to 0} e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)} = e^{\frac{1}{2}},$$

т.к.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \frac{1}{2}$$

(см. выше) и на основании теоремы о пределе сложной функции (внутренняя функция $y = \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$, внешняя – $g(y) = e^y$). Здесь использован тот факт, что любое положительное число a можно представить в виде $a = e^{\ln a}$ (т.к. экспонента и натуральный логарифм – взаимно-обратные функции).

Вообще, при $x \to x_0 \neq 0 \vee \infty$, удобно использовать замену переменной $y = x - x_0$.

Пример. Найдем порядок малости функции $f(x)$ относительно функции $g(x)$, где

$$f(x) = 2\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)\right),\ g(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x^3}} - 1,\ x \to \infty.$$

Видим, что при $x \to \infty$

$$f(x) \sim 2\sin\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right) \sim \frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4} \sim \frac{2}{x^2},\text{ а}$$

$$g(x) \sim \frac{1}{2x^3}$$

Поэтому порядок малости $f(x)$ относительно $g(x)$ при $k = \frac{2}{3}$.

Действительно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g^{\alpha}(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2/_{x^2}}{\left(1/_{2x^3}\right)^{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2^{\alpha+1}x^{3\alpha}}{x^2}.$$

Очевидно, что этот предел не равен ни нулю, ни бесконечности только при $\alpha=\frac{2}{3}$ (при $\alpha>\frac{2}{3}$ он равен ∞, а при $\alpha<\frac{2}{3}$ - нулю).

Вообще, как при вычислении пределов, так и при асимптотическом сравнении функций, эквивалентная функция обычно ищется в одном из указанных в приведенной ниже таблице видов, в зависимости от стремления аргумента и функции (везде подразумевается, что $\alpha>0$).

	$x\to 0$	$x\to\infty$	$x\to x_0$
$f(x)\to 0$	$f(x)\sim Cx^{\alpha}$	$f(x)\sim C/x^{\alpha}$	$f(x)\sim C(x-x_0)^{\alpha}$
$f(x)\to\infty$	$f(x)\sim C/x^{\alpha}$	$f(x)\sim Cx^{\alpha}$	$f(x)\sim C/(x-x_0)^{\alpha}$

Эквивалентная не всегда существует в таком виде, но если существует, то единственна.

Опр. Пусть б.м. (б.б.) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности $\dot{u}_{\delta}(*)$. Если $f(x)$ представима в виде

$$f(x)=g(x)+o(g(x)),\ x\to *,$$

то $g(x)$ называется *главной частью* функции $f(x)$ при $x\to *$. Не трудно показать, что $g(x)$ является главной частью функции $f(x)$, тогда и только тогда, когда $f(x)\sim g(x)$ (при рассматриваемом стремлении аргумента).

Лекция 6

§ 1. Понятие непрерывности функции в точке.

Опр. Функция f(x), определенная в некоторой (не проколотой!) окрестности точки x_0 называется непрерывной в этой точке, если:

1) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

2) этот предел равен значению функции в точке x_0.

Класс (множество) функций, непрерывных в точке x_0 обозначается $C(x_0)$. Соответственно, факт непрерывности функции в точке x_0 можно записать в виде: $f(x)\in C(x_0)$. Итак, по определению

$$\{f(x)\in C(x_0)\}\overset{df}{\Leftrightarrow}\{\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\}.$$

Так функция $y=x^2$ является непрерывной в точке $x=0$ (как и во всех других точках вещественной оси), рис. 1. Действительно, при x достаточно близких к нулю, эта функция будет сколь угодно близка к нулю, но $y(0)$=0.

Функция, график которой представлен на рис. 2, не является непрерывной в точке x_0. Действительно, эта функция имеет различные пределы при $x\to x_0+$ и при $x\to x_0-$ ($f(x_0+)$ и $f(x_0-)$, соответственно). Поэтому двустороннего предела при $x\to x_0$ не существует.

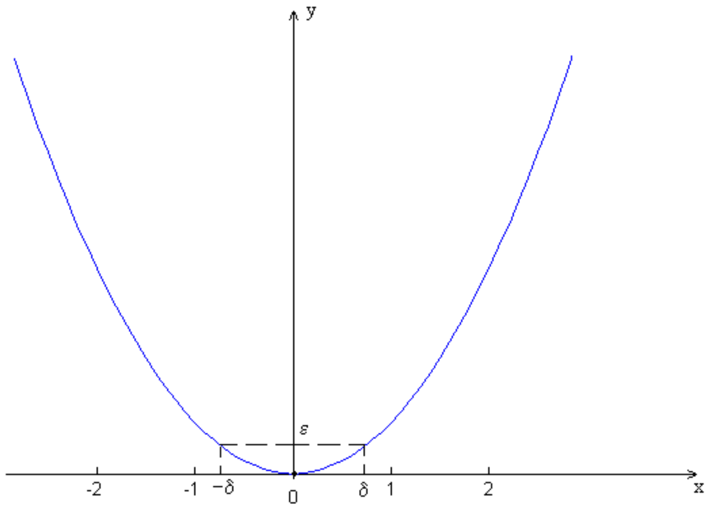


Рис. 1. График функции $y = x^2$.

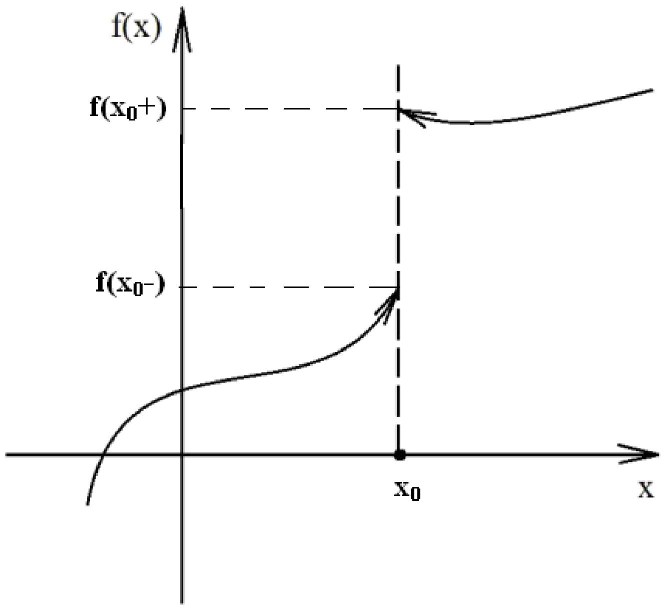


Рис. 2. Пример функции, не являющейся непрерывной.

Для понимания смысла непрерывности, полезна следующая иллюстрация: функция непрерывна, если ее график можно нарисовать, не отрывая ручки от листа.

С учетом определения предела, определение непрерывности функции можно дать в более развернутой (более подробной) форме:

Опр. Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0 называется непрерывной в этой точке, если в достаточно малой окрестности точки x_0 значения этой функции сколь угодно близки к $f(x_0)$:

$$\{f(x) \in C(x_0)\} \overset{df}{\Leftrightarrow} \{\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ x \in \dot{u}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}.$$

С учетом теоремы о связи двустороннего предела с односторонними, определение непрерывности функции в точке можно дать также в следующей (равносильной предыдущим) форме.

Опр. Функция f(x), определенная в некоторой окрестности точки x_0 называется непрерывной в этой точке, если:

1) существует $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x)$;

2) существует $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = f(x_0)$.

Еще одну (эквивалентную предыдущим) формулировку определения непрерывности можно дать в терминах приращений.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Выберем какое-нибудь значение x из этой окрестности и назовем разность $\Delta x = x - x_0$ *приращением аргумента*. Отметим, что приращение аргумента может быть как положительным, так и отрицательным. Соответствующую разность $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ назовем *приращением функции* (рис. 3).

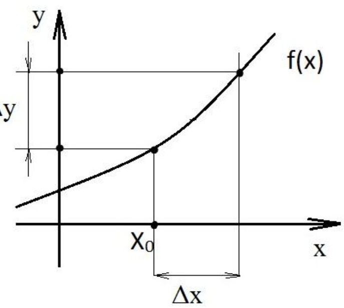


Рис. 3. Иллюстрация понятия приращения функции.

Опр. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\{f(x) \in C(x_0)\} \Leftrightarrow^{df} \{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0\}.$$

Эквивалентность этой формулировки определения непрерывности самой первой формулировке, очевидна из того факта, что $\Delta x \to 0$ тогда и только тогда, когда $x \to x_0$, а $\Delta y \to 0$ тогда и только тогда, когда $f(x) \to f(x_0)$.

Итак, в настоящем параграфе дано четыре равносильных формулировки определения непрерывности функции в точке.

§ 2. Понятие односторонней непрерывности.

Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x}$. Бессмысленно говорить о том непрерывна ли она в точке x=0, поскольку она определна только при $x \ge 0$. Однако можно ввести понятие правосторонней непрерывности.

Опр. Функция $f(x)$, определенная в правосторонней окрестности точки x_0 называется правосторонне-непрерывной в этой точке (непрерывной в точке x_0 справа), если существует предел данной функции при $x \to x_0 +$ и он равен значению функции в точке x_0:

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x) = f(x_0).$$

Нетрудно видеть, что функция $y = \sqrt{x}$ является правосторонне-непрерывной в точке x_0. Аналогично определяется левосторонняя непрерывность.

Опр. Функция $f(x)$, определенная в левосторонней окрестности точки x_0 называется левосторонне-непрерывной в этой точке (непрерывной в точке x_0 слева), если существует предел данной функции при $x \to x_0 -$ и он равен значению функции в точке x_0:

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = f(x_0).$$

Теорема. Для того, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна в этой точке, как слева, так и справа.

Справедливость этой теоремы очевидна из теоремы о связи двустороннего предела функции с односторонними.

§3. Арифметические операции над непрерывными функциями.

Теорема. Сумма функций, непрерывных в точке x_0, есть функция непрерывная в этой точке.

Доказательство. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные в некоторой окрестности точки x_0 непрерывны в этой точке. По определению непрерывности (первая формулировка) это означает, что

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ и } \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0).$$

Значение функции $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ в точке x_0 очевидно равно $\varphi(x_0) = f(x_0) + g(x_0)$.
В силу теоремы о пределе суммы, существует

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = \varphi(x_0),$$

что и означает непрерывность функции $\varphi(x)$ в точке x_0.

Теорема доказана.

Очевидно, что эта теорема справедлива для любого конечного числа слагаемых.
Аналогично доказываются две следующие теоремы.

Теорема. Произведение функций, непрерывных в точке x_0, есть функция непрерывная в этой точке.

Следствие. Произведение непрерывной функции на число – функция непрерывная. Действительно, число (т.е. постоянная) есть функция непрерывная на R.

Теорема. Частное двух функций непрерывных в точке x_0 есть функция непрерывная в этой точке, при условии, что делитель (функция, стоящая в знаменателе) не равен нулю.

§4. Переход к пределу под знаком непрерывной функции. Непрерывность сложной функции (композиции функций).

Теорема. Пусть функция $z = g(y)$ непрерывна в точке y_0, а функция, $y = f(x)$ имеет конечный предел при $x \to x_0$ равный y_0:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0.$$

Тогда

$$\exists \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x))$$

Доказательство.

Поскольку g(y) непрерывна в точке y_0,

$$\exists \lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0).$$

По условию теоремы, существует также

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$. Но, по теореме о пределе сложной функции, из этих двух фактов вытекает, что

$$\exists \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right).$$

Теорема доказана.

Теорема (о непрерывности сложной функции). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $g(y)$ непрерывна в точке y_0, причем $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $F(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0,

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Но, в силу предыдущей теоремы,

$$\exists \lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) = g(f(x_0)) = F(x_0),$$

что и означает непрерывность функции $F(x) = g(f(x))$ в точке x_0.

Теорема доказана.

§5. Локальные свойства функции, непрерывной в точке.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то существует окрестность $u_\delta(x_0)$, в которой знак функции совпадает с ее знаком в точке x_0.

Доказательство. . Поскольку функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0,

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

В силу теоремы о сохранении функцией знака предела, существует окрестность $u_\delta(x_0)$, в которой знак функции совпадает со знаком $f(x_0)$.

Теорема доказана.

Данная теорема проиллюстрирована на рис. 4. Очевидно, что раз непрерывная функция положительна в точке x_0, то она останется положительной и в некоторой (хотя бы малой) окрестности этой точки.

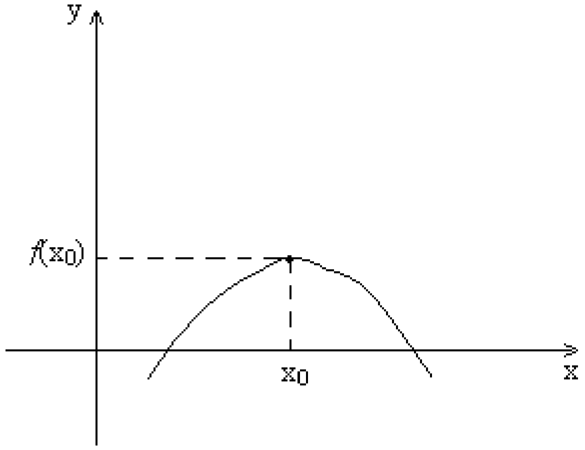


Рис. 4. Иллюстрация сохранения знака непрерывной функцией.

Теорема. Функция, непрерывна в точке x_0, локально ограничена в этой точке. Справедливость этой теоремы вытекает из теоремы о локальной ограниченности функции, имеющей предел и определения непрерывности. Доказательство опустим.

Лекция 7

§1. Непрерывность функции на промежутке.

Опр. Функция $f(x)$, определенная на интервале (a,b) называется непрерывной на этом интервале, если она непрерывна в каждой его точке.

Опр. Функция $f(x)$, определенная на полуинтервале $[a,b)$, называется непрерывной на этом полуинтервале, если она

1. непрерывна на интервале (a,b);
2. правосторонне непрерывна в точке a.

Опр. Функция $f(x)$, определенная на полуинтервале $(a,b]$, называется непрерывной на этом полуинтервале, если она

1. непрерывна на интервале (a,b);
2. левосторонне непрерывна в точке b.

Опр. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a,b]$, называется непрерывной на этом отрезке, если она

1. непрерывна на интервале (a,b);
2. правосторонне непрерывна в точке a.
3. левосторонне непрерывна в точке b.

Пример. Функция $y=\sqrt{1-x^2}$ непрерывна на отрезке $x\in[-1,1]$.

Класс (множество) функций, непрерывных на промежутке X обозначается $C(X)$. Соответственно, факт непрерывности функции на промежутке X можно записать в виде: $f(x)\in C(X)$. Например, если функция непрерывна на интервале (a,b), то $f(x)\in C(a,b)$.

§2. Непрерывность элементарных функций.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Основные элементарные функции непрерывны в области определения. Эта теорема доказывается для каждой из основных элементарных функций (степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических и обратных тригонометрических) по отдельности, на основе определения непрерывности функции в точке.

В качестве примера, докажем, что функция $y=\sin x$ непрерывна на R. Очевидно, что она является непрерывной в точке $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=\sin 0=0$, т.е. при x достаточно близких к нулю, значения этой функции будут сколь угодно близки к нулю. Рассмотрим произвольную точку $x_0\in R$. Приращению Δx аргумента в этой точке отвечает приращение функции

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}).$$

Функция $2\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2})$ ограничена на R:

$$|\, 2\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2})\,| \le 2,$$

а функция $\sin\frac{\Delta x}{2}$ – б.м. при $\Delta x \to 0$, по теореме о пределе сложной функции и в силу того, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$. По теореме о произведении б.м. функции на локально ограниченную, $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, а последнее и означает непрерывность функции $y = \sin x$ в точке x_0. В силу произвольности выбора точки x_0, функция $y = \sin x$ непрерывна на R.

Как уже говорилось в лекции 2, элементарной функцией называется любая функция, полученная из основных элементарных функций и постоянных с помощью арифметических операций (сложения, умножения и деления), а также композиции (построения сложной функции).

Теорема. Элементарные функции непрерывны в области определения.

Справедливость этой теоремы очевидна из предыдущей теоремы и теорем о непрерывности суммы, произведения, отношения и композиции непрерывных функций. В качестве примера докажем непрерывность многочлена.

Многочлен $P_n(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n$ определен на R. Покажем, что он непрерывен на R. Очевидно, что постоянная $y = c$ есть непрерывная на R функция: для любого $x \in R$ и для любого Δx

$$\Delta y = c - c = 0,$$

а следовательно при $\Delta x \to 0$ $\Delta y \to 0$.

(Впрочем, для того чтобы убедиться в непрерывности постоянной, достаточно изобразить ее график). Функция $y = x$ тоже непрерывна на R:

$\Delta y = \Delta x$, следовательно, при $\Delta x \to 0$ $\Delta y \to 0$.

Функция $y = x^2 = x \cdot x$ непрерывна на R, как произведение непрерывных функций. Следовательно, непрерывна и функция $y = x^3 = x^2 \cdot x$ и т.д., вплоть до функции $y = x^n = x^{n-1} \cdot x$. Функции $y = c_k \cdot x^k$ ($k = 0,1,...,n$) тоже непрерывны на R, как произведения двух непрерывных функций. Наконец, многочлен $P_n(x)$ непрерывен на R, как сумма непрерывных функций.

Теорема о непрерывности элементарных функций играет важнейшую роль для вычисления пределов. Действительно, именно из нее по определению непрерывности следует, что если *элементарная* функция $y = f(x)$ определена в точке x_0, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, чем мы постоянно пользуемся при вычислении пределов, заменяя предел функции на ее значение в предельной точке (см. лекцию 3). Например,

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, как первый замечательный предел, а $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1$, поскольку значение этой функции в предельной точке равно единице.

§3. Классификация точек разрыва.

Опр. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0. И пусть она непрерывна в любой точке этой окрестности, но не является непрерывной в самой точке x_0. В этом случае, точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

При классификации точек разрыва, будем отталкиваться от второй формулировки определения непрерывности функции в точке:
функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если существуют оба односторонних предела данной функции в этой точке, причем

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x) = \lim_{x \to x_0 -} f(x) = f(x_0) .$$

Выделим несколько случаев нарушения указанных условий.

Опр. Если x_0 – точка разрыва функции $f(x)$, но существуют (конечные) пределы

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x) = f(x_0 +) \text{ и } \lim_{x \to x_0 -} f(x) = f(x_0 -),$$

точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода*.
Можно выделить два подкласса таких точек разрыва.

Опр. Если $f(x_0+) \neq f(x_0-)$, точка разрыва первого рода x_0 называется точкой *конечного разрыва* (точкой *скачка*). При этом разность $\Delta = f(x_0+) - f(x_0-)$ называется скачком функции в точке x_0.

Пример точки конечного разрыва представлен на рис. 2 лекции 6.

Опр. Если $f(x_0+) = f(x_0-) \neq f(x_0)$, в частности, если $f(x_0)$ не определено, точка разрыва первого рода x_0 называется точкой устранимого разрыва.

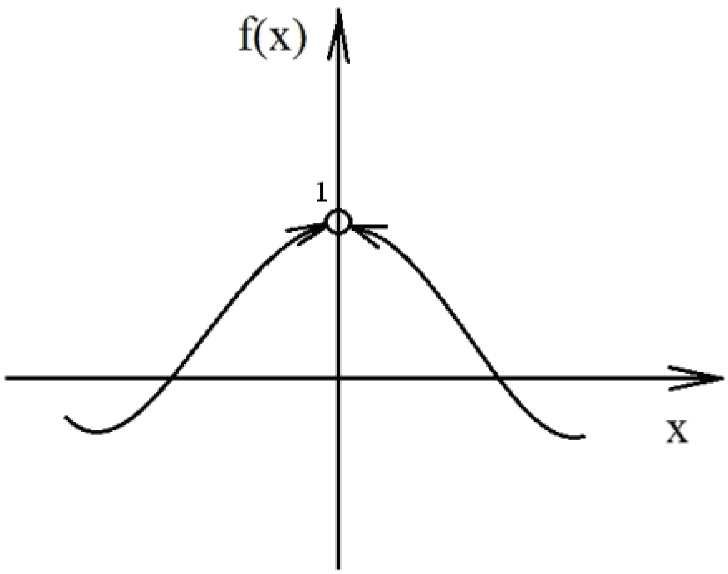


Рис. 1. Пример точки устранимого разрыва.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ (рис. 1). Эта функция не определена в точке $x = 0$. Но, как известно,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

и, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x}=1$. По определению, $x=0$ – точка устранимого разрыва для данной функции. Точка $x=0$ является точкой устранимого разрыва также для функции

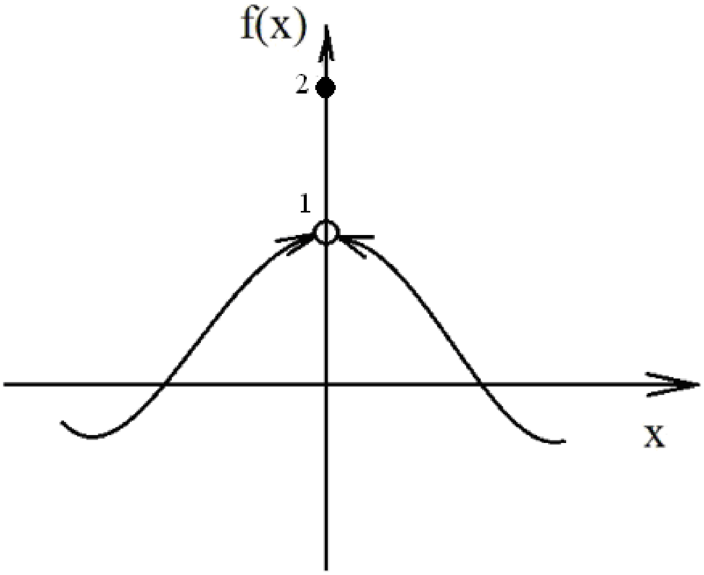


Рис. 2. Пример точки устранимого разрыва.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases},$$

график которой представлен на рис. 2.

Разрыв называется устранимым, поскольку достаточно доопределить (переопределить) значение функции в одной точке и получится непрерывная функция (в случае точки конечного разрыва, это невозможно). Так функция

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

является непрерывной.

Опр. Если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=f(x_0+)$ или $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0-)$ не существует (в частности, равен ∞), то точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода*.

В частности, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности, точка x_0 называется точкой *бесконечного разрыва*.

Так функции $y=\frac{1}{x}$ и $y=\frac{1}{x^2}$ имеют точку бесконечного разрыва $x=0$ (рис. 3, рис. 4).

Замечание. Точка разрыва второго рода не обязательно является точкой бесконечного разрыва. Так для функции $y=\sin\frac{1}{x}$ не существуют ни конечные, ни бесконечные односторонние пределы при x стремящемся к нулю (так как не существует ни конечный, ни бесконечный предел функции $\sin x$ при $x\to\infty$), и точка $x=0$ является для этой функции точкой разрыва второго рода, но не точкой бесконечного разрыва, рис. 5 Частота колебаний возрастает по мере приближения к точке $x=0$ как справа так и слева

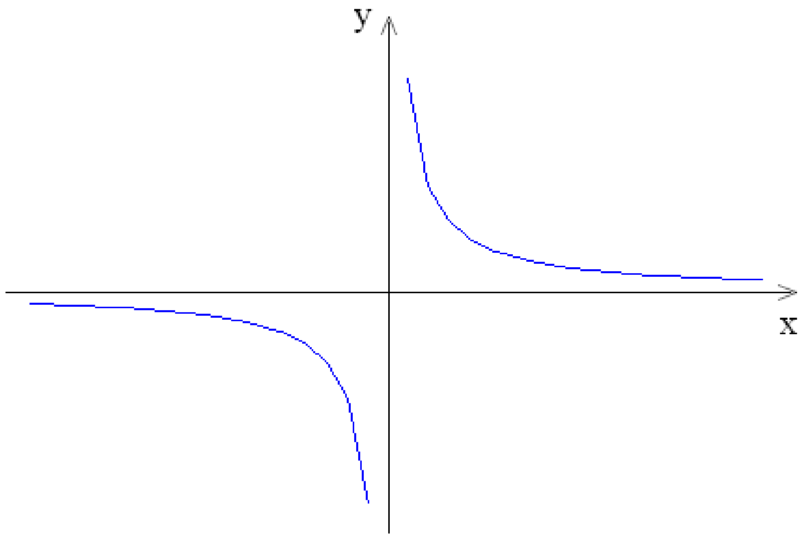


Рис. 3. Пример точки бесконечного разрыва.

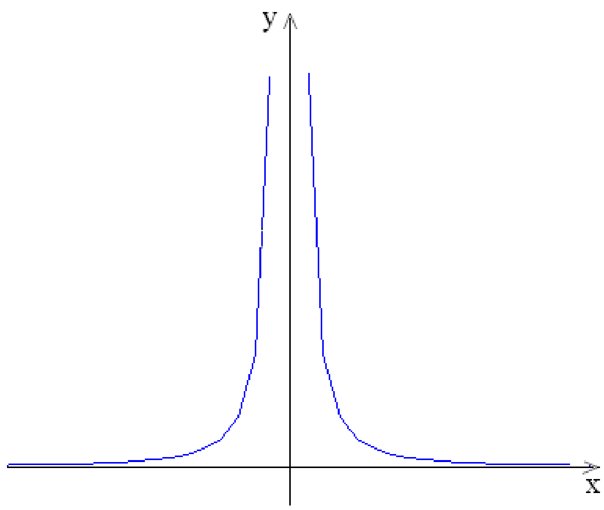


Рис. 4. Пример точки бесконечного разрыва.

и стремится к бесконечности при $x \to 0$. В результате, для того, чтобы достичь точки $x = 0$, двигаясь вдоль графика (например, справа), пришлось бы преодолеть бесконечное число колебаний (пройти по бесконечно длинной кривой).

Рассмотрим несколько примеров исследования функции на предмет наличия точек разрыва.

Примеры. Найти точки разрыва функции $y = f(x)$, исследовать их характер и построить эскиз графика функции вблизи точек разрыва.

1. $y = \dfrac{|x-1|}{x-1}$.

Возможная точка разрыва: $x = 1$, так как функция не определена в этой точке.

$$\lim_{x \to 1+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \to 1+} \frac{x-1}{x-1} = 1.$$

Действительно, при $x > 1$ (в правосторонней окрестности точки $x = 1$) $|x-1| = x-1$.

$$\lim_{x \to 1-} \frac{|x-1|}{x-1} = -\lim_{x \to 1+} \frac{x-1}{x-1} = -1.$$

Действительно, при $x < 1$ (в левосторонней окрестности точки $x = 1$) $|x-1| = -(x-1)$.

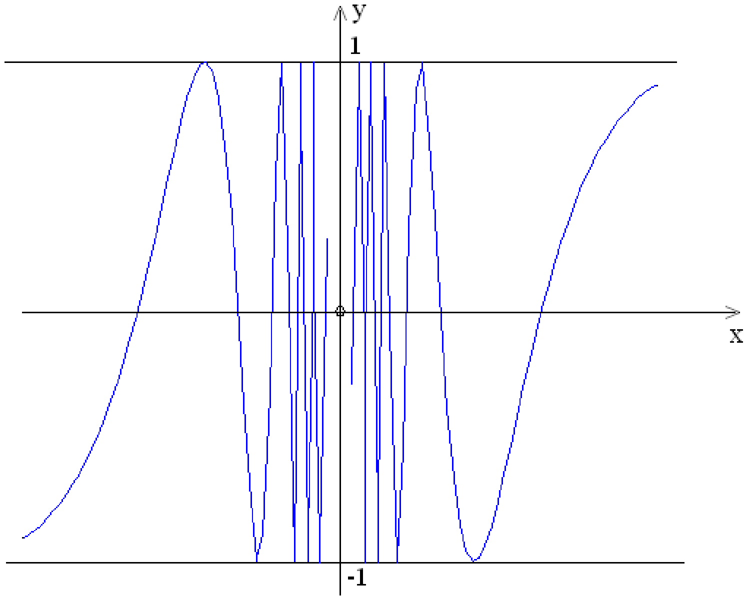


Рис. 5. Пример точки разрыва второго рода, не являющейся точкой бесконечного разрыва.

Таким образом, $x=1$ – точка разрыва 1-го рода, конечного разрыва. Эскиз графика вблизи точки разрыва представлен на рис. 6.

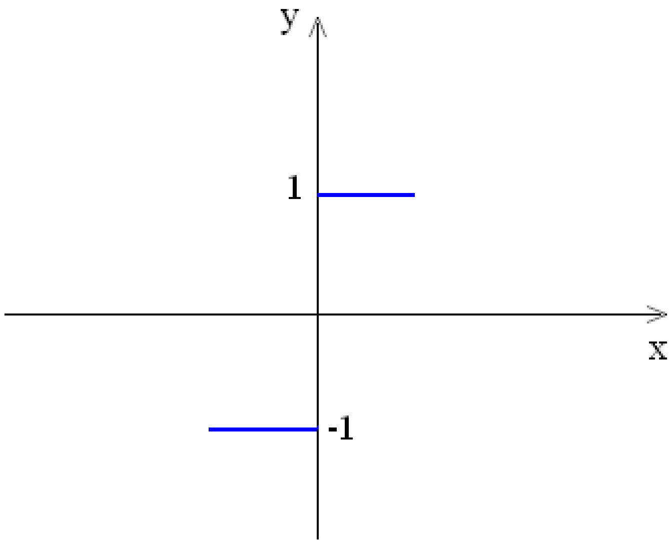


Рис. 6. Эскиз графика функции $y=\dfrac{|x-1|}{x-1}$ вблизи точки разрыва.

2. $y=e^{\frac{1}{x}}$.

Возможная точка разрыва: $x=0$, так как функция не определена в этой точке.

$$\lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Действительно, при $x\to 0+$ $\dfrac{1}{x}\to+\infty$ (при $x>0$ $\dfrac{1}{x}>0$), а $e^t\to+\infty$ при $t\to+\infty$.

$$\lim_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = 0+.$$

Действительно, при $x\to 0-$ $\dfrac{1}{x}\to-\infty$ (при $x<0$ $\dfrac{1}{x}<0$), а $e^t\to 0$ при $t\to-\infty$ (представьте себе график функции $y=e^t$). Символ «$0+$» означает, что функция

$y = e^{\frac{1}{x}} > 0$ больше нуля в малой левосторонней окрестности точки $x = 0$, т.е. график входит в точку $(0,0)$ сверху (очевидно, что функция $y = e^{\frac{1}{x}} > 0$ на всей области определения).

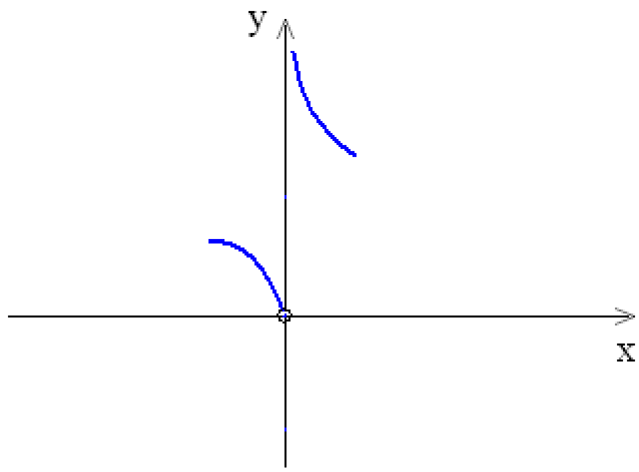


Рис. 7. Эскиз графика функции $y = e^{\frac{1}{x}}$ вблизи точки разрыва.

Таким образом, $x = 0$ – точка разрыва 2-го рода, бесконечного разрыва. Эскиз графика вблизи точки разрыва представлен на рис. 7. Точка $(0,0)$ изображена в виде пустого кружочка, чтобы подчеркнуть, что функция не определена в этой точке.

§4. Свойства функции, непрерывной на отрезке.

Теорема. Если функция непрерывна на отрезке $x \in [a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Справедливость этой теоремы иллюстрируется рис. 8: $m \le f(x) \le M$. Рис. 9 демонстрирует, что если функция не является непрерывной, то она не обязательно ограничена (на этом рисунке x_0 – точка бесконечного разрыва). Рис. 10 демонстрирует, что даже если функция непрерывна на интервале (a,b), а не на отрезке, то она не обязательно является ограниченной на этом интервале (на рисунке $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = +\infty$).

Теорема. Если функция непрерывна на отрезке $x \in [a,b]$, то она достигает на этом отрезке своего наименьшего (m) и своего наибольшего (M) значений.

Справедливость этой теоремы демонстрируется рис. 8. Рис. 9 показывает, что если функция не является непрерывной, то она не обязательно достигает своего наименьшего и наибольшего значений. Рис. 10 демонстрирует, что непрерывности функции на интервале не достаточно для того, чтобы она принимала на этом интервале наименьшее и наибольшее значения.

Теорема. Если функция непрерывна на отрезке $x \in [a,b]$ и принимает на границах этого отрезка различные значения: $f(a) \ne f(b)$, то в точках интервала x $\in$ (a,b) она хотя бы один раз принимает любое значение, заключенное между ее значениями на границах отрезка:

$$\forall \mu : f(a) \le \mu \le f(b),\ \exists c \in (a,b) : f(c) = \mu$$

(здесь для определенности предполагается, что $f(a) < f(b)$).

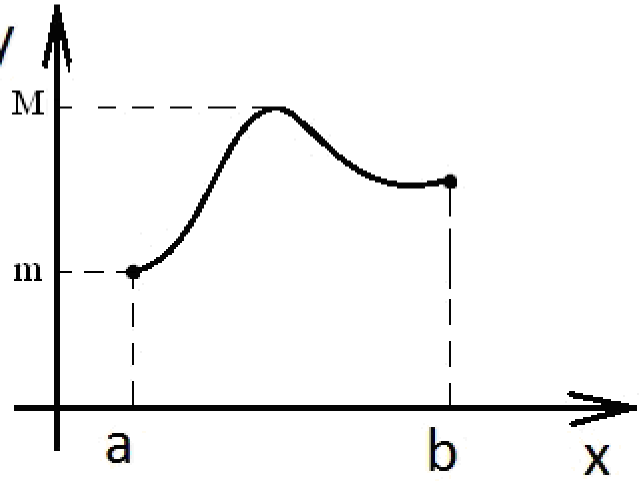


Рис. 8. Функция непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке.

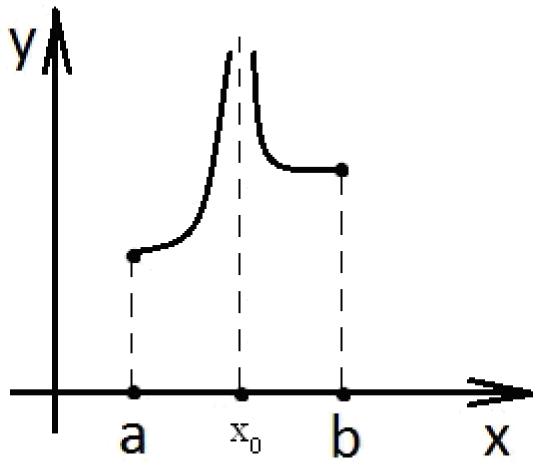


Рис. 9. Если функция не является непрерывной, то она не обязательно ограничена.

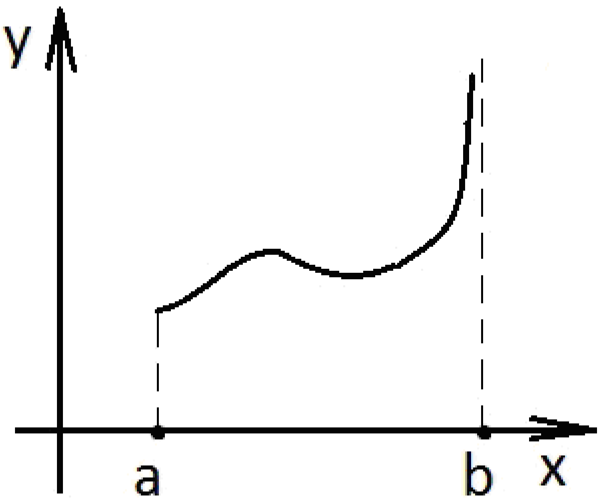


Рис. 10. Если функция непрерывна на интервале (a,b), то она не обязательно ограниченна на этом интервале.

Справедливость этой теоремы демонстрируется рис. 11. Рис. 12 показывает, что если функция не является непрерывной, то она не обязательно принимает в точках интервала (a,b) произвольно выбранное значение, заключенное между ее значениями на границах отрезка $[a,b]$. Рис. 13 демонстрирует, что непрерывности функции на интервале (a,b) не достаточно для того, чтобы она принимала в точках этого интервала любое значение, заключенное между ее значениями на границах отрезка $[a,b]$.

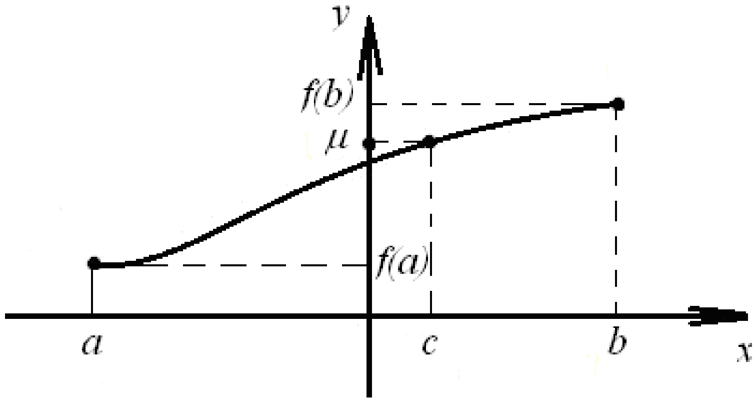


Рис. 11. Функция, непрерывна на отрезке $[a,b]$, принимает в точках интервала (a,b)

любое значение, заключенное между ее значениями на границах отрезка.

Если функция непрерывна на интервале (a,b), она не обязательно принимает в точках этого интервала любое значение, заключенное между ее значениями на границах отрезка (рис. 13).

Следствие. Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, а f(a) и f(b) имеют разные знаки, то найдется точка $c \in$(a,b), в которой функция f(x) обращается в ноль: f(c)=0 (рис. 14).

Если функция не является непрерывной на отрезке $[a,b]$, то такой точки может и не быть (рис. 15).

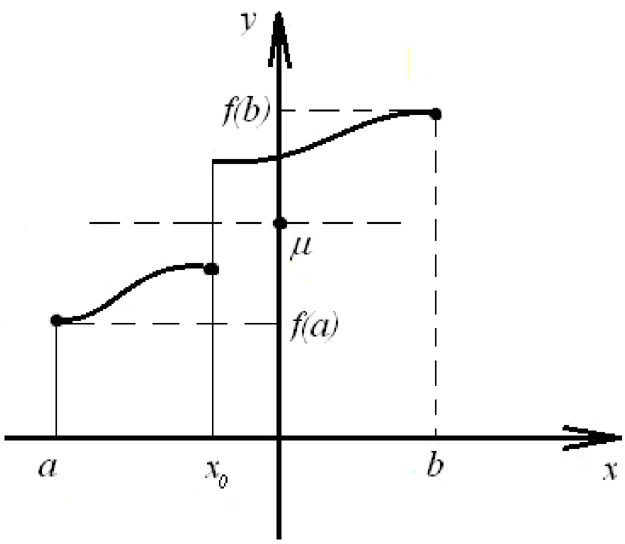


Рис. 12. Не непрерывная функция может не принимать в точках интервала (a,b) произвольно выбранное значение μ, заключенное между ее значениями на границах отрезка $[a,b]$.

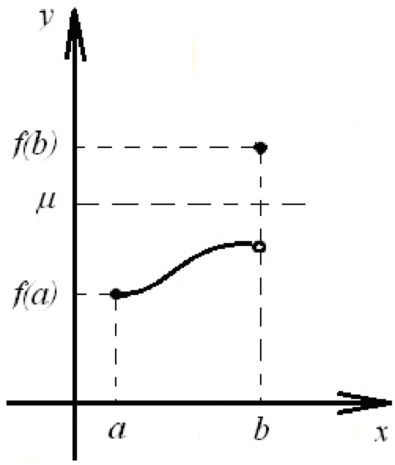


Рис. 13. Непрерывности функции на интервале (a,b) не достаточно для того, чтобы она принимала в точках этого интервала любое значение, заключенное между ее значениями на границах отрезка $[a,b]$.

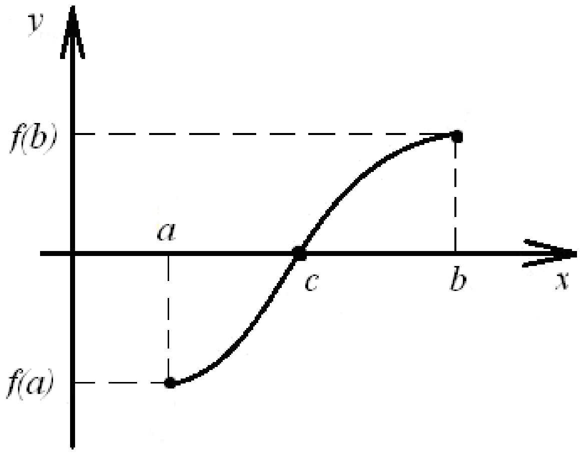


Рис. 14. Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, а f(a) и f(b) имеют разные знаки, то найдется точка $c \in$(a,b), в которой функция f(x) обращается в ноль: f(c)=0.

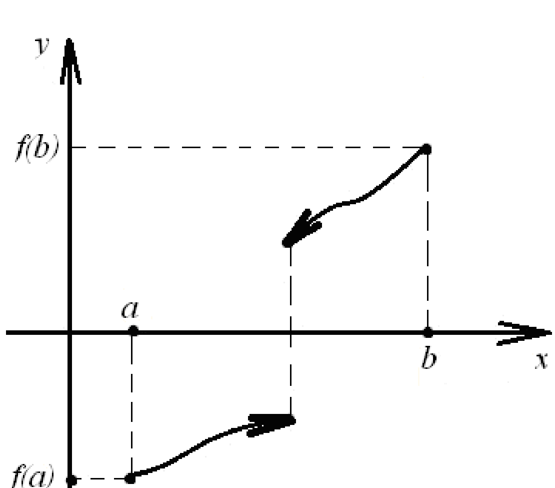


Рис. 15. Если f(a) и f(b) имеют разные знаки, но функция f(x) не является непрерывной на отрезке $[a,b]$, то она может не обращаться в ноль внутри интервала (a,b).